УДК: 517.911 + 517.912 + 517.988.63

ТЕОРЕМА БАНАХА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ковалев М.Д. [1]

[1]МГПУ-Московский городской педагогический университет, Россия, Москва, e-mail: kovalev7079@gmail.com

Одной из основных задач алгебры и математического анализа, занимавшей умы ученых, считается нахождение решений различных классов уравнений и систем уравнений. Известно, что некоторые классы уравнений неразрешимы аналитически. В таком случае используют "обходные" пути решения, например, исследуют поведение функций в обеих частях уравнения для определения существования и количества решений, а затем находят нужный корень с помощью подбора или итерационной модели. В данной статье будет рассмотрен один из таких способов решения уравнений, а именно теорема Банаха, открытая польским математиком Стефаном Банахом в 1922 году.
Ключевые слова: норма, нормированное пространство, банахово пространство, неподвижная точка, теорема Банаха о неподвижной точке

BANACH THEOREM AND ITS APPLICATIONS

Kovalev M.D.[1]

[1]MGPU – Moscow City University, Moscow, e-mail: kovalev7079@gmail.com

One of the main tasks of the algebra and mathematical analysis, which occupied the minds of scientists, is the finding of solutions to various classes of equations and systems of equations. It is known that some classes of equations are analytically insoluble. In this case, “roundabout” solution paths are used, for example, is being studied the behavior of functions in both parts of the equation to determine the existence and number of solutions, and then find the desired root using a selection of the root or iterative model. This article will consider one of these methods of solving equations, namely, the Banach theorem, discovered by the Polish mathematician Stefan Banach in 1922.
Keywords: norm, normed vector space, Banach space, fixed point, Banach fixed-point theorem

Приложения теоремы Банаха для решения конкретных задач. Для формулировки теоремы нам понадобятся следующие определения:

Определение 1. Банаховым пространством $\mathbb{B}$ называется полное нормированное пространство.

Примерами банаховых пространств являются:

а) Пространство действительных чисел $\mathbb{R}$ с нормой, заданной по правилу $\|x\| = |x|$

б) Пространство $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с введенной на нем нормой $\|f\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$

Определение 2. Пусть X – произвольное банахово пространство. Точка x называется неподвижной точкой отображения $f: X \to X$ (множества X в себя), если $Tx = x$.
Для числовой функции неподвижными будут являться точки, для которых значение функции в точке совпадет с самой точкой, то есть $f(a) = a$.
Определение 3. Оператор $A: V_1 \to V_2$, где V_1 и V_2 – линейные нормированные пространства над полем F, называется ограниченным, если $\exists M > 0: \|Ax\|_{V_2} \le M\|x\|_{V_1}$ $(\forall x \in V_1)$. Наименьшая постоянная величина M, удовлетворяющая данному условию, называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$.
Определение 4. Отображение $T: V \to V$ линейного нормированного пространства в себя называется сжимающим, если $\exists q < 1$, такое, что $\forall x, y \in V$ выполняется неравенство
$\|Tx - Ty\| \le q \cdot \|x - y\|$.

Пример 1. Пусть $V = \left[0; \frac{1}{3}\right], Tx = f(x) = x^2, \|x - y\| = |y - x|$. Доказать, что отображение T является сжимающим.

Доказательство. Достаточно показать, что выполняется неравенство из определения 4. $\|Tx - Ty\| = |y^2 - x^2| \le |y + x| \cdot |y - x| \le \frac{2}{3} \cdot |y - x| = \frac{2}{3}\|x - y\|$, то есть отображение является сжимающим, что и требовалось доказать.

Примечание. Гомотетия с коэффициентом $k < 1$ является важным примером сжимающего отображения в геометрии.

Сформулируем теорему Банаха о неподвижной точке [2, с. 76]:
Теорема (Банаха о неподвижной точке). Пусть $T: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ – сжимающее отображение банахова пространства в себя. Тогда T имеет ровно одну неподвижную точку.
Условие теоремы означает, что существует единственное решение $x \in \mathbb{B}$ уравнения $Tx = x$.

Выше было отмечено, что данная теорема позволяет находить корни уравнений, неразрешимых аналитически. Убедимся в этом на конкретных примерах.

Задача 1. Решить уравнение $2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{arctg} x + 3x = 0$.
Решение. 1) Преобразуем уравнение к виду $1 - \cos x - \operatorname{arctg} x + 3x = 0$.

2) Если уравнение имеет корень $x = x_0$, то $x_0 = \frac{1}{3}(\operatorname{arctg} x_0 + \cos x_0 - 1)$.

3) Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{1}{3}(\operatorname{arctg} t + \cos t - 1)$ и докажем, что это отображение является сжимающим. По теореме Лагранжа $\forall t_1, t_2$ имеем: $f(t_1) - f(t_2) = f'(c)(t_1 - t_2)$. Оценим значение выражения $f'(c)$.

Так как $f'(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t^2} - \sin t\right)$, то $\forall t\ \ f'(t) \leq \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$. Тогда

$f(t_1) - f(t_2) \leq \frac{2}{3}(t_1 - t_2)$. Тогда заданное отображение является сжимающим (по определению 4) и по теореме Банаха имеет ровно одну неподвижную точку.

4) Это означает, что уравнение имеет ровно один корень, причем такой, что $f(x_0) = x_0$. Так как $\sin 0 = 0$, то и $\operatorname{arctg} 0 = 0$, то есть данным корнем является $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

В некоторых случаях найти точное значение корня не представляется возможным. В таких случаях прибегают к итерационным моделям (приближенному решению). Рассмотрим соответствующий пример.

Задача 2. Решить уравнение $\sin x = x^2$ с заданной точностью.

1) Приведем уравнение к удобному для итерации виду $x = \varphi(x)$. Получим $\frac{\sin x}{x} = x$.

2) Так как $\sin x < x\ \forall x > 0$, то на открытом луче $x \in (0; +\infty)$ отображение $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ является сжимающим. По теореме Банаха, оно имеет единственный корень на данном отрезке, причем итерационная последовательность $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ будет сходиться к этому корню.

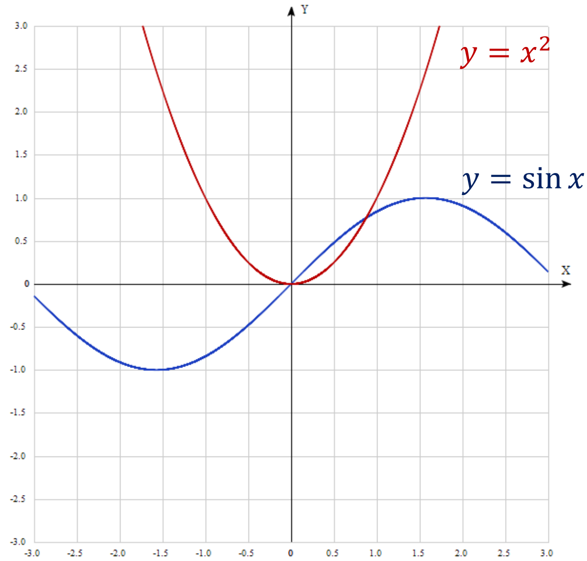

Рис.1. Графическое изображение решения задачи 2.

3) В качестве начального приближения возьмем произвольную точку на данном луче, например $x = 5$. Тогда итерационная последовательность будет иметь вид:

$\varphi(5) \approx -0{,}191784$

$\varphi(-0{,}19) \approx 0{,}993994$

$\varphi(0{,}99) \approx 0{,}84471$

$\varphi(0{,}84) \approx 0{,}88648$

$\varphi(0{,}886) \approx 0{,}874208$

Выбрав произвольную точку на луче, на котором отображение является сжимающим, уже через несколько шагов получили хорошую точность (вычисление корня в базе Wolfram Alpha дает результат $x \approx 0{,}8767262 \ldots$). При этом на каждом шаге итерации мы округляли полученное значение. Продолжая этот процесс, можно получить любую требуемую точность.

Теорема Банаха позволяет доказывать теоремы существования и единственности решений задач Коши в теории обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений [1, с.45-46]. В данной статье рассмотрим возможность применения рассматриваемой теоремы к решению конкретных задач для дифференциального уравнения первого порядка с произвольным начальным условием и для интегрального уравнения.

Задача 3. Решить уравнение $y' = y$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Нам задана задача Коши $\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. Перепишем уравнение в виде $Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} y(x)dx$. Нетрудно убедится, что данный переход является равносильным. Принцип сжимающих отображений применим при $|x - x_0| \le q < 1$. В качестве начального приближения возьмем $y(x) \equiv 0$. Тогда последовательность приближений $0,\ y_1 = A(0),\ \ldots,\ y_{n+1} = A(y_n), \ldots$ будет иметь вид:

$y_1(x) \equiv y_0$

$y_2(x) \equiv y_0\big(1 + (x - x_0)\big)$

$$y_3(x) \equiv y_0\left(1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\right)$$

… … … … … … … … … … … …

$$y_{n+1}(x) = y_0\left(1 + (x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

Учитывая, что $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ – разложение в ряд Тейлора, имеем $y(x) = y_0 e^{x - x_0}$.

Ответ: $y(x) = y_0 e^{x - x_0}$.

Как уже отмечалось, теорема Банаха позволяет решать интегральные уравнения в банаховых пространствах.

Задача 4. В пространстве $C[0;1]$ решить интегральное уравнение: $x(z)=\frac{1}{7}\int_0^1 zx(t)dt+1$.

Решение. Считая $Ax(z)=\frac{1}{7}\int_0^1 zx(t)dt+1$, замечаем, что отображение A действует в пространство $C[0;1]$. Таким образом, задача сводится к решению уравнения $x=Ax$ в пространстве $C[0;1]$, то есть нахождению неподвижной точки отображения
$A: C[0;1]\to C[0;1]$.

Отображение A является сжимающим. Действительно,

$$|Ax(z)-Ay(z)|=\frac{1}{7}\left|\int_0^1 z\big(x(t)-y(t)\big)dt\right|\le\frac{1}{7}\int_0^1 z|x(t)-y(t)|dt\le$$

$$\le\frac{1}{7}\int_0^1 \max_{z\in[0;1]} z\cdot\max_{t\in[0;1]}|x(t)-y(t)|\,dt=\frac{1}{7}\|x-y\|\int_0^1 dt=\frac{1}{7}\rho(x,y).$$

Мы доказали, что $\forall z\in[0;1]$ и $\forall x,y\in C[0;1]$ выполняется

$$\rho(Ax,Ay)=\max_{z\in[0;1]}|Ax(z)-Ay(z)|\le\frac{1}{7}\rho(x,y).$$

Найдем решение уравнения методом последовательных приближений. Для этого возьмем произвольный элемент $x_0\in C[0;1]$. Полагая $x_0\equiv x_0(z)$, построим сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ приближенных решений уравнения $Ax=x$. Получим

$$x_1=A(x_0)=\frac{1}{7}\int_0^1 z\cdot 0dt+1=1;$$

$$x_2=A(x_1)=\frac{1}{7}\int_0^1 z\cdot 1dt+1=\frac{1}{7}z+1;$$

$$x_3=A(x_2)=\frac{1}{7}\int_0^1 z\cdot\left(\frac{t}{7}+1\right)dt+1=\frac{z}{7}\left(\frac{1}{14}+1\right)+1=z\left(\frac{1}{7\cdot 14}+\frac{1}{7}\right);$$

$$x_4=A(x_3)=\frac{z}{7}\int_0^1\left(t\left(\frac{1}{7\cdot 14}+\frac{1}{7}\right)+1\right)dt+1=z\left(\frac{1}{7\cdot 14^2}+\frac{1}{7\cdot 14}+\frac{1}{7}\right)+1;$$

...

$$x_n=A(x_{n-1})=\frac{z}{7}\left(\frac{1}{14^{n-2}}+\frac{1}{14^{n-3}}+\ldots+1\right)+1=\frac{z}{7}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{14}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{14}}\right)+1.$$

Найдем предел получившейся последовательности.

$$\lim_{n\to\infty} x_n(z) = \frac{z}{7}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{14}}\right) + 1 = \frac{2}{13}z + 1.$$

Таким образом, уравнение имеет решение $x(z) = \frac{2}{13}z + 1$, причем это решение единственное.

Заключение. Помимо рассмотренных в статье задач, теорема Банаха используется для доказательства существования и единственности решения интегральных уравнений (в частности, Вольтерры и Фредгольма), позволяет решать системы линейных алгебраических и дифференциальных уравнений, применяется в численных методах и теории фракталов. Таким образом, теорема Банаха является эффективным теоретическим средством в практическом решении конкретных задач. Поэтому знание данной теоремы полезно для решения целых классов задач различных разделов математики и можно рекомендовать изучение этой теоремы при рассмотрении метрических пространств в курсе "Математического анализа".

Автор выражает благодарность научному руководителю, профессору кафедры высшей математики и методики преподавания математики института цифрового образования МГПУ В.А. Чугунову за ценные советы при написании текущей работы.

Библиографический список

1. Ганенкова, Е. Г. Функциональный анализ: линейные операторы: учебное пособие для студентов математического факультета / Е. Г. Ганенкова, К. Ф. Амозова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2013. – С. 29-30

2. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка: Пер. с англ. / Под. ред. А.К. Гущина. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — С. 75-76.

3. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. – 6-е изд., дополн. – М.: МЦНМО, 2012. – XIV + 818 с. Библ.: 60 назв. Илл.: 41.

4. Ильин В. А. и др. Математический анализ. Начальный курс/В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А. Н. Тихонова,— 2-е изд., перераб., — М.: Изд-во МГУ, 1985. — С. 570.