

УДК

Методические приемы предупреждения ошибок по теме «Неравенства, системы неравенств» в основной школе

Гузенко Е.А.

Шуйский филиал ИВГУ 155908, Ивановская область, г. Шуя, ул. Кооперативная, д.24,

Email: sgpu@sspu.ru

Аннотация: Изучение множества действительных чисел – это одна из основных задач школьного курса математики. Эта задача включает в себя изучение некоторых отношений между действительными числами, начиная с отношений равенства и неравенства и заканчивая функциональными отношениями. Неравенства встречаются на протяжении всего курса математики. С точки зрения математической логики неравенство является высказыванием. С помощью неравенства задаются основные числовые множества, на языке неравенств нередко формулируется постановка задачи во многих приложениях математики. Принимая во внимание важность и обширность материала этой линии, отметим целесообразность на заключительных этапах обучения предлагать достаточно разнообразные и сложные задачи, призванные активировать наиболее важные компоненты этой линии, основные понятия и основные методы решения, исследования и обоснования задач.

В работе приведены примеры методических приемов, предупреждающие ошибки учащихся в изучении неравенств, в зависимости от класса. Представлены упражнения и задания, которые помогут более полно понять сущность неравенств, а также разработан сборник упражнений, помогающий предупредить ошибки при решении разного рода неравенств.

Ключевые слова: учащиеся основной школы, неравенства, системы неравенств, методика преподавания, методические приемы

Methodical techniques of preventing mistakes on the topic “Inequalities, the systems of inequalities” in primary school

Guzenko E.A

Shuya branch of Ivanovo State University

Address: 24 Kooperativnaya Street, Shuya, Ivanovo region, 155908

Email: sgpu@sspu.ru

Annotation: Studying the set of real numbers is one of the main tasks of the student course in mathematics. This task includes the study of some relations between real numbers starting with relations of equations and inequalities and finishing with functional relations. Inequalities occur throughout the whole course in mathematics. In terms of mathematical logic, inequality is an assertion. Basic number sets are defined using inequalities. The statement of the problem is often formulated in the language of inequalities in many applications of mathematics. Taking into account the importance and vastitude of the information of this line, we may note the practicability of offering various difficult tasks which were created to activate the most important components of this line at the final stages of studying as well as to offer the basic concepts and methods of solving, exploring and explaining tasks.

The paper gives examples of the methodical techniques which prevent pupils from making mistakes while studying the topic of inequalities depending on the form. Exercises and tasks which will help to understand the essence of inequalities are presented and the exercise book which could help to prevent making mistakes in

solving various kinds of inequations has been developed.

Key words: primary school pupils, inequations, systems of inequations, teaching methods, methodical techniques

Сейчас в методической литературе все чаще и чаще появляется мнение, которое основано на результатах ОГЭ, ЕГЭ и приемных экзаменах в среднеспециальные и высшие учебные заведения, о наличии серьезных недостатков в знаниях учащихся основной школы по разделу «Неравенства».

Имеются основания говорить не об отдельных недочетах в методике преподавания неравенств, а о неблагоприятном положении во всей системе преподавания и изучения неравенств в основной школе. Значит, необходимо выявить основные приемы, которые предупреждают ошибки при изучении темы «Неравенства и их системы» и лежат в основе методики преподавания данной темы. Все выше сказанное и определяет *актуальность* рассматриваемой темы исследования.

Целью данной работы является рассмотрение методических приемов предупреждения ошибок учащихся при изучении неравенств и их систем в основной школе.

Для устранения недостатков в знаниях учащихся по теме «Неравенства, системы неравенств» необходимо более раннее знакомство учащихся основной школы с неравенствами и постоянное внимание к ним на протяжении всего курса математики в 5-9 классах.

Так при изучении курса арифметики в 5-6-х классах школьники должны приобрести прочный навык в употреблении знаков неравенства $<$ и $>$ для записи соотношения «меньше», «больше» между числами, в связи с чем они и получают понятие числового неравенства. Изучение неравенств следует проводить параллельно с изучением уравнений. Наряду с решением уравнений на основании определения и свойств арифметических действий следует предлагать решать и неравенства также на основании свойств арифметических действий. При решении большей части неравенств необходимо использовать выводы об изменении результата действий в связи с изменением компонентов действий; при решении других – использовать знание соотношения результата и компонентов действий умножения и деления дробных чисел, понятие правильной и неправильной дроби. При решении неравенств необходимо добиться понимания, что решением неравенств является множество чисел [3].

В 5-6 классах следует предлагать упражнения с целыми и дробными числами, которые познакомили бы школьников с содержанием основных свойств числовых неравенств:

1. Если одно число больше (меньше) второго, а второе число больше (меньше) третьего, то первое число больше (меньше) третьего.
2. Если одно число больше второго и к каждому из них прибавить одно и то же число, то первая сумма будет больше второй.
3. Если одно число больше второго и из каждого из них вычтено одно и то же число, то первая разность больше второй разности.
4. Если одно число больше второго и каждое из них умножено (разделено) на одно и то же число, отличное от нуля, то первое произведение (частное) больше второго произведения.

После того как школьники познакомятся с отрицательными числами и овладеют понятиями «меньше», «больше» для рациональных чисел, для решения неравенств необходимо применять следующие свойства арифметических действий:

1. При прибавлении к числу положительного числа – число увеличивается, при прибавлении отрицательного числа – число уменьшается.
2. Если вычитаемое число положительное, то разность меньше уменьшаемого, если вычитаемое число отрицательное, то разность больше уменьшаемого.
3. Если одно число больше другого, то разность между большим числом и меньшим положительна, разность между меньшим и большим числом отрицательна.
4. Если разность положительна, то уменьшаемое больше вычитаемого, если разность отрицательна, то уменьшаемое меньше вычитаемого.
5. Произведение двух чисел положительно, если оба сомножителя одного знака, отрицательно, если сомножители противоположного знака.
6. Частное двух чисел положительно, если делимое и делитель одного знака, отрицательно, если делимое и делитель имеют противоположные знаки.

При изучении темы «Положительные и отрицательные числа» можно предложить систему упражнений, связанную с понятием неравенства.

При формировании понятия неравенства следует придавать большое значение геометрической иллюстрации понятия «меньше» и «больше», а также геометрической иллюстрации решения неравенств. Использование наглядного образа расположения на оси точек поможет обучающимся выяснить область чисел, которая удовлетворяет данному неравенству, сделает более наглядным решение неравенства.

Например, число $a > b$, если точка, соответствующая числу a , лежит правее точки, соответствующей b .

Изучение неравенств необходимо продолжать на протяжении всего курса алгебры средней школы. В 7-ом классе, так же как и в 5-6-х классах, параллельно с решением простейших уравнений следует решать и простейшие неравенства на основании свойств арифметических действий.

Учащиеся должны научиться складывать неравенства, умножать их на положительные и отрицательные числа, перемножать неравенства (когда это возможно), возводить в квадрат. На этом же этапе необходимо включить достаточное количество упражнений с буквенными неравенствами, которые в действующих школьных учебниках практически отсутствуют.

Рассмотрим примеры таких упражнений.

Упражнение 1. Умножить неравенство $2a > b$ на b .

Решение.

Если $b > 0$, то $2ab > b^2$.

Если $b < 0$, то $2ab < b^2$.

Если $b = 0$, то $2ab = 0, b^2 = 0 \Rightarrow 2ab = b^2$.

Упражнение 2. Какой знак надо поставить между выражениями $2 - 3a$ и $2 - 3b$, чтобы получилось верное неравенство, если известно, что $a > b$?

Решение.

Поскольку $a > b$, то $-3a < -3b$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства по 2, имеем $2 - 3a < 2 - 3b$.

Основные свойства неравенств хорошо могут быть закреплены при решении несложных задач на доказательство неравенств.

Упражнение 3. Докажите, что квадрат среднего из любых трех последовательных целых чисел больше произведения крайних.

Решение.

Пусть $n, n + 1, n + 2$ - последовательность натуральных чисел, тогда

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

$$n(n + 2) = n^2 + 2n,$$

$$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \Rightarrow (n + 1)^2 > n(n + 2).$$

Уже на первых этапах изучения неравенств следует использовать упражнения с неравенствами, демонстрирующие различные жизненные ситуации.

Упражнение 4. Лодочник проплыл n километров по течению реки со скоростью 7 км/ч и вернулся обратно, двигаясь против течения со скоростью 4 км/ч. На следующий день он проплыл по озеру расстояние, равное $2,4n$ (км), причем двигался со скоростью 6 км/ч. На какой из двух маршрутов потребовалось больше времени?

Решение.

	v	t	s
1 день	7 км/ч, 4 км/ч	$\frac{n}{7} + \frac{n}{4} = \frac{11n}{28}$ (ч)	n (км)
2 день	6 км/ч	$\frac{2,4n}{6}$ (ч)	$2,4n$ (км)

$$\frac{11n}{28} \text{ и } \frac{2,4n}{6},$$

$$\frac{33n}{84} < \frac{33,6n}{84}.$$

Следовательно, на второй маршрут потребовалось больше времени.

При изучении темы «Алгебраические выражения. Уравнения» в 7 классе можно предложить систему упражнений, связанную с понятием неравенства. Данная система включает в себя задания двух типов (рассмотрим их).

Тип 1. Чтение и запись неравенств. Простейшие доказательства. Сравнения выражений.

Задание 1. Прочитать неравенства:

$$\frac{5}{6} < 1; \frac{1}{2} > 0,3; \frac{3}{4} < 0,78;$$

$$2,77 > 2,763; a + 1 > a.$$

Задание 2. Найти несколько значений буквы a , при которых выполняются соотношения: $a + 3 > 4$; $a + 6 > 6\frac{1}{2}$; $a + 7 > 7$.

Задание 3. Вычислить выражения $(a + b)^2$ и $a^2 + b^2$ для значений a, b , которые представлены в первом столбце таблицы:

a	b	$(a + b)^2$	$a^2 + b^2$	Результат сравнения $(a + b)^2$ и $a^2 + b^2$
1	3			
2	1,5			
0	3			
2	0			
5	5			

В 5-ый столбец таблицы внести результат сравнения $(a + b)^2$ и $a^2 + b^2$ соответствующих значений a, b с помощью знаков $>$, $<$ или $=$.

Тип 2. Доказательство методом от противного.

Примечание. На уроках геометрии в 7 классе необходимо применять умение доказывать методом от противного, но усвоить его только на одном геометрическом

материале довольно сложно, поскольку в курсе геометрии данного класса мало задач на доказательство этим методом. Поэтому на практике лучше использовать примеры по алгебре на доказательство неравенств методом от противного.

Задание 1. Дано $a + 3 > 10$. Методом рассуждений от противного нужно доказать, что $a \neq 7$.

Решение. Допустим, что $a = 7$, тогда имеем $a + 3 = 7 + 3 = 10$. Что противоречит условию задания, следовательно, $a \neq 7$.

Задание 2. Дано $3a < 5a$. Методом рассуждений от противного нужно доказать, что $a \neq 0$.

Решение. Допустим, что $a = 0$, тогда имеем $3a = 0, 5a = 0 \Rightarrow 3a = 5a$. Что противоречит условию задания, следовательно, $a \neq 0$.

В 8-м классе до систематического изучения неравенств необходимо закрепить навык в решении простейших неравенств на основании свойств арифметических действий. В теме «Алгебраические дроби» следует обратить большое внимание на решение простейших дробных неравенств на основании свойств разности и частного.

При систематическом изучении неравенств в 8-м классе систематизируются все полученные знания о неравенствах в 5-7 классах. Здесь изучаются свойства числовых неравенств, предусмотренные учебной программой. Дается определение понятиям «Неравенство», «Числовое неравенство». Вводится понятие «Равносильные неравенства». Учащихся необходимо познакомить на частных примерах с теоремами о равносильности двух неравенств. На основании теорем о равносильности 2-х неравенств и следствий из них необходимо отработать навык в решении линейных неравенств с одним неизвестным. Познакомить с графическим решением неравенств 1-ой степени с одним неизвестным. На частных примерах познакомить учащихся с решением системы двух неравенств вида:

$$\begin{cases} x > 2, \\ x > 5; \end{cases} \begin{cases} x < 4, \\ x < 1; \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ x < 10. \end{cases}$$

В 8-м классе следует познакомить учащихся со свойствами числовых неравенств, членами которых являются степени и корни, познакомить с решением простейших неравенств 2-ой степени с одним неизвестным, с графической иллюстрацией решений.

В 9-м классе полученные ранее знания о неравенствах необходимо систематизировать, расширить и углубить.

Необходимо рассматривать упражнения и с практическим содержанием.

Упражнение 5. Два автохозяйства отправили несколько машин для перевозки грузов. Число машин, отправленных из 2-ого автохозяйства, меньше удвоенного числа машин, отправленных из первого. Если бы первое автохозяйство послало на две машины больше, а

второе на две машины меньше, то машин из 2-ого автохозяйства было бы больше, чем машин из 1-ого. Сколько машин отправлено из каждого автохозяйства, если всего было отправлено менее 18 машин?

Решение.

Обозначим через x и y – число машин, отправленных из 1-ого и 2-ого автохозяйств соответственно. По условию задачи имеем $y < 2x$, $y - 2 > x + 2$, $x + y < 18$. Значит, задача сводится к решению в целых положительных числах следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} y < 2x, \\ y - 2 > x + 2, \\ x + y < 18. \end{cases}$$

Из 1-го и 2-ого неравенств следует, что $2x > x + 4$, $x > 4$.

Из 2-го и 3-го неравенств следует, что $x < 7$.

Таким образом, $x = 5$ или $x = 6$.

При $x = 5$ из первых двух неравенств получаем $y < 10$, $y > 9$, т.е. в этом случае целых решений не существует.

При $x = 6$ получаем $y < 12$, $y > 10$, т.е. $y = 11$.

Следовательно, из 1-ого автохозяйства отправили 6 машин, а из 2-ого – 11 машин.

Существенное значение при изучении неравенств имеет система упражнений, необходимым элементом которой является геометрическая иллюстрация чисел сначала на числовом луче, а затем на числовой оси. При подборе упражнений на неравенства необходимо учитывать, что упражнения должны быть доступны для учащихся (особенно в 5-7 классах), иметь связь с изучаемым материалом и быть разнообразными по своему содержанию.

Представим сборник упражнений, направленный на предупреждение ошибок при решении разных типов неравенств.


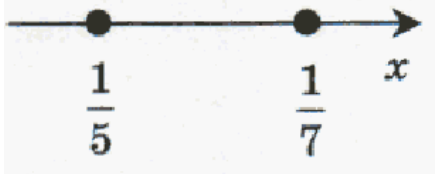



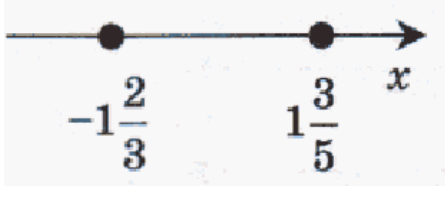
Линейные неравенства и их системы

Упражнение 1. Заполнить пропуски.

$-3x - 1 > -8x,$ $-3x - \underline{\quad} > 1,$ $5x > 1,$ $x > \underline{\quad}$	$9x + 5 < -2 + 4x,$ $9x + \underline{\quad} < -2 + \underline{\quad},$ $5x < \underline{\quad},$ $x < \underline{\quad}$	$4(-4 - x) < -8,$ $-16 - \underline{\quad} < -8,$ $-4x < -8\underline{\quad},$ $x > \underline{\quad}$
$-3(2x + 1) < -7x,$ $\underline{\quad} < -7x,$ $\underline{\quad},$ $x < 3$	$2 - 5(10x - 1) < -2,$ $2 - \underline{\quad} < -2,$ $-10x < \underline{\quad},$ $x > 0,9$	$3x + 4(-7 + 6x) \leq -7x + 6,$ $3x + \underline{\quad} \leq -7x + 6,$ $\underline{\quad} - +7x \leq 6 + \underline{\quad},$ $\underline{\quad}x \leq 34,$

		$x \leq 1$
--	--	------------

Упражнение 2. Укажите номера рисунков, на которых числа на координатной прямой изображены неправильно:

а) 	б) 
в) 	г) 
д) 	е) 

Упражнение 3. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют указанным условиям:


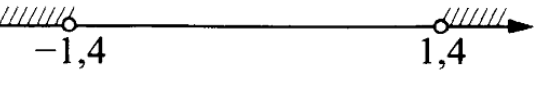
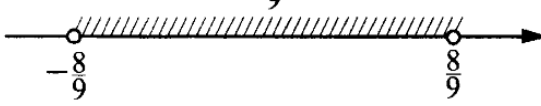
а) $x \geq -2$	
б) $x \leq 0$	
в) $2 < x < 5$	
г) $1 \leq x \leq 3$	
д) $4 < x \leq 7$	

Квадратные неравенства

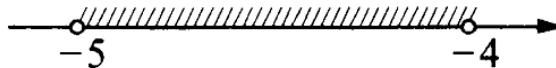
Упражнение 1. Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 3$. С помощью графика решите неравенство:

- 1) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$,
- 2) $x^2 - 4x + 3 > 0$,
- 3) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Упражнение 2. Какими должны быть точки (закрашенными или нет)?

а) $x^2 \geq 9$	
б) $25x^2 > 49$	
в) $81x^2 \leq 64$	

$$\text{г) } x^2 + 9x + 20 < 0$$



Неравенства с модулем

Упражнение. Изобразите на координатной прямой множество точек, удовлетворяющих данным условиям. Представьте аналитическую запись.

Пример	Геометрическая модель	Аналитическая модель
1) $ x > 1$		
2) $ x < 3$		
3) $ x \geq 4$		
4) $ x \leq 2$		
5) $ x - 1 < 2$		

Знание основных сведений о неравенствах имеет большое значение для общего математического развития школьников на протяжении всего курса изучения математики. Таким образом, при более раннем знакомстве обучающихся основной школы с неравенствами и при постоянном внимании к неравенствам на протяжении всего курса алгебры средней школы, учащиеся получают основные сведения о неравенствах, которые помогут им в дальнейшем избежать ошибок при решении.

Список литературы:

1. Имранов Б. О системе изучения неравенств // Математика в школе. –2012. – №7. – с. 38
2. Левитас Г.Г. Современный урок математики. Методика преподавания/ Г.Г. Левитас. – М.: Высшая школа, 1989.
3. Нешков К.И. Неравенства в курсе математики средней школы. / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук по методике преподавания математики. – Москва, 1956.
4. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2015. Математика. Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений. Практикум / Ю.В. Садовничий. – М.: Экзамен, 2015
5. Ященко И. В., Шестаков С. А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра. — М.: МЦНМО, 2018.