

УДК 51-78

Математическое исследование в музыке

Тесленок, А.А.¹ Ефимцева. И.Б.¹

ФГБОУ ВО Курский государственный университет , колледж коммерции , технологии и сервиса , email:

nastya.teslenok03@gmail.ru

irinaivanova2510@mail.ru

В самом широком смысле можно сказать, что весь мир - это музыка, потому что музыка - это математика .В наши дни математика даёт не только подходы в изучении существующих музыкальных произведений и передачи полученных знаний ученикам, но и новые творческие возможности, новые способы «конструирования» музыки. Связь музыки с математикой - одна из древнейших. Приведём слова Леонардо да Винчи: «Nissuna humana investigatione si po dimandare vera scientia, s'essa non passa per le mattematiche dimostrationsi» (ни одно человеческое исследование не может назваться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства).

Целью моей работы является применение некоторых математических методов для обработки музыкальных произведений.

UDC 51-78

Mathematical research in music

Teslenok, A. A.¹ Efimtseva.I. B.¹

FSBEI HE Kursk State University, College of Commerce, Technology and Service, email:

nastya.teslenok03@gmail.ru

irinaivanova2510@mail.ru

In the broadest sense, we can say that the whole world is music, because music is mathematics .Nowadays, mathematics provides not only approaches to the study of existing musical works and the transfer of knowledge to students, but also new creative opportunities, new ways of "constructing" music. The connection between music and mathematics is one of the oldest. Here are the words of Leonardo da Vinci: "Nissuna humana investigatione si po dimandare vera scientia, s'essa non passa per le mattematiche dimostrationsi" (no human research can be called true science if it has not passed through mathematical proofs).

The purpose of my work is to use some mathematical methods for processing musical works.

В наши дни математика даёт не только подходы в изучении существующих музыкальных произведений и передачи полученных знаний ученикам, но и новые творческие возможности, новые способы «конструирования» музыки.

Для хранения и передачи музыки используют нотную запись, которая содержит информацию о высоте нот, времени начала воспроизведения, длительности, громкости и музыкальных инструментах, на которых данная мелодия должна исполняться.

Связь музыки с математикой - одна из древнейших. В самом широком смысле можно сказать, что весь мир - это музыка, потому что музыка - это математика. На подчиненность музыкальных структур математическим законам люди обратили внимание не одно тысячелетие назад. Профессиональные музыканты первых веков нашей эры, получавшие образование по "квадривию" (музыка, арифметика, геометрия, астрономия), четверке "высоких" математических наук, в число которых входила и музыка, были очень хорошо знакомы и с математикой, и с геометрией, и с астрономией, изучая труды Никомаха (100 год н.э.), Евклида (365-330 гг. до н.э.), и в чуть более позднее время Боэция (480 год н.э.). В течение практически всего средневековья музыканты пользовались числовыми закономерностями, в том числе знаменитыми "числами Фибоначчи", для придания своим произведениям геометрической стройности. Интересно то, что периодом наибольшей удаленности от "научно-художественных" установок музыкального искусства стала как раз Венская классика.

Математические методы помогают раскрывать закономерности, отличительные особенности музыкального произведения и эпохи, в которую оно было написано.

Пути взаимодействия музыки и математики прослеживаются, начиная с древности, когда появляется наука о музыке. Начало развитию этой науки было положено пифагорейцам в древней Греции в VI в до н.э. Пифагорейцы, производя акустические измерения, открыли первый достоверно известный закон : зависимость высоты звука от частоты колебаний, а этой последней- от длины струны.

Не один век прошёл с тех пор, как великий Пифагор и его ученики открыли законы целочисленных отношений в музыке и дали математическое построение музыкальной гаммы. Однако до сих пор в математическом анализе мелодии, музыкального произведения в целом делались только робкие шаги. Лишь к середине XX века, который часто называют веком науки, произведения искусства стали подвергаться изучению математическими методами. Причиной тому является проникновение науки во все сферы общественной жизни. Начиная с 1952г. интересные работы по применению математических методов в исследованиях искусства – литературы, живописи, музыки – публикует видный немецкий ученый в области физики плазмы. Однако у этого ученого энциклопедиста есть и хобби – исследования в области экспериментальной эстетики, часть из которых собрана в интереснейшей монографии Фукса «По всем правилам искусства». В своих работах по экспериментальной эстетике Фукс стремился показать, что точные методы могут быть эффективно применены к исследованию культурного наследия человечества.

Наступил период научно-технической революции, и история взаимодействия математики и музыки обогатилась новым элементом – элементом информатики. Появился новый метод композиции, который получил название стохастического.

Первым отечественным автором, который применил этот метод с участием компьютера, был математик виолончелист Р.Х. Заприпов. Его первые композиции появились в 1959г. Он дал им название «Уральские нервы», обыграв таким образом марку компьютера «Урал». Первые четыре «Уральских напева» были опубликованы в 1962г в одном из выпускных периодического сборника «Проблемы кибернетика»

Контрапункт. Простейшие математические операции, которые осваивает человек в первые годы своей жизни — арифметические операции сложения и вычитания. Простейшее преобразование мелодии, которому учат музыкантов — транспозиция: изменение высоты каждой ноты музыкальной последовательности на фиксированное (для данной транспозиции) число музыкальных единиц — полутонов. В случае нескольких голосов транспозиция одного относительно других называется вертикальным контрапунктом. История показала, что формальные построения могут оказаться удивительно красивыми на слух.

Контрапункт (лат. *punctum contra punctum, punctus contra punctum* — нота против ноты, буквально — точка против точки) — одновременное сочетание двух или более самостоятельных мелодических голосов. «Контрапунктом» также называли музыкально-теоретическую дисциплину, занимающуюся изучением контрапунктических композиций (теперь полифония). Музыкальным термином «контрапункт» (метонимически) ныне пользуются литературоведы, искусствоведы и журналисты. Контрапункт создавался как педагогический инструмент, с помощью которого студенты могли сочинять музыкальные композиции с постепенным увеличением сложности.

Арифметика по модулю n . Периодичность нот в гамме вызывает аналогии с периодическими множествами в математике, и это сопоставление порождает один из формально-математических методов сочинения музыки.

В мире целых чисел есть специальная, теоретико-числовая возможность расширения понятия равенства: два целых числа a и b называются сравнимыми («как бы равными») по модулю натурального числа n , если их разность $a-b$ делится на n , или, символически, $(\text{mod } n)$. Понятие сравнения ввёл великий математик К. Ф. Гаусс, он же предложил новую структуру — «арифметику по модулю n » (1801). В такой арифметике числа можно складывать, вычитать, умножать, иногда — даже делить. Например, если модуль равен 12, то в этой арифметике будет ровно 12 различных чисел, их

представителями удобно считать остатки при делении на 12 натуральных чисел: $\{0, 1, \dots, 10, 11\}$. Примеры операций в этой арифметике: $8+5=1, 8*5=4$.

Аналогия с хроматической гаммой: есть период, октава, состоящая из 12 нот. Прибавляя к ноте ре первой октавы 12 полутонов, получим ноту ре второй октавы, которая, как известно гармонирует с первой нотой, «сравнима» с ней!

Такой подход возник ещё в 1844 году. Его автор, французский музыковед Камиль Дюрют, обратил внимание на то, что при равномерно темперированном строе рояля множество интервалов разбивается на периоды из 12 ступеней. А это приводит к определению операций над музыкальными интервалами «по модулю 12».

Применение этих идей в сочинении музыки привело американского композитора Мильтона Бэббита даже к созданию целой музыкальной теории, так называемой «Set Theory» (1992), изложенной им в диссертации по математике!

В обеих отраслях (и в математике, и в музыке) существуют строгие правила оформления, символика. Как в математике присутствуют числа, формулы, вычислительные знаки, так и в музыке имеют место быть ноты, специальные обозначения, нотный стан. Причём, ноты можно записать не только при помощи специального символа, но и в виде дроби.

А Что если взять классическое музыкально произведение и поменять все такты местами? Получится неразбериха и путаница, вся красота мелодии исчезнет. Также и в математике. Ведь математика – точная наука, которая не терпит фальши.

Гармонический анализ. Гармонический анализ музыкального произведения – сложный многоуровневый процесс. Он подразумевает не только обращение непосредственно к изменениям аккордовых вертикалей, их соотношениям, закономерностям, но и рассмотрение многих межаспектных взаимодействий, возникающих в музыкальном тексте. В поле зрения попадают мелодика, ритм, фактура и другие факторы, напрямую или косвенно влияющие на гармоническую составляющую музыкального произведения. Простейшими гармониками являются тригонометрические функции $1, \cos ks, \sin ks$ (для любого натурального числа k). Эти функции играют особую роль и в математике, и в акустике. Следующие задачи принадлежат к числу основных в гармоническом анализе: представление заданной функции в виде суммы тригонометрического ряда, отыскание в виде суммы такого ряда функции, обладающей заданными свойствами (например, решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего определённым начальным и краевым условиям).

В музыкальной акустике первая из перечисленных задач проявилась в предложенном Г. Л. Ф. Гельмгольцем методе исследования звука с помощью системы куполообразных

резонаторов («резонаторы Гельмгольца»), позволяющих определить спектральный состав звука.

Вторая из упомянутых задач стала генератором возникновения аддитивного синтеза — одного из ярких направлений в музыке XX века. Заключается такой стиль в использовании искусственно созданных звуков, полученных суперпозицией большого числа простейших гармоник. Современный уровень компьютерной техники позволяет обойтись без механических приборов. В частности, французский композитор Жан-Клод Риссе получил солидный набор электронных звуков, напоминающих звук колокола. На этом основывается его сочинение «Mutations» (1969).

Теория вероятностей. Теория вероятностей - это раздел математики, в котором изучаются случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении.

Применение вероятностных методов для написания музыки было предложено Янисом Ксенакисом. Ксенакис получил инженерное образование, работал с Ле Корбюзье, стал признанным архитектором. С другой стороны, всю жизнь занимался музыкой, стал не только известным композитором, но и музыковедом-теоретиком. Объединяло его работы, достижения и увлечения то, что всюду он применял или искал возможности применения математических методов.

Например, идея использования движения прямых — общая и для музыкальной пьесы 1954 года «Methastasis», в виде непрерывного глиссандо струнных, и для проекта павильона Phillips на всемирной выставке Expo-58 в Брюсселе, поверхность крыши которого была получена непрерывным движением прямолинейных образующих. Идея динамического развития музыкального сочинения согласно выбранной математической модели развивалась им после этого в течение многих лет. Модель определялась случайным процессом, который подбирался так, чтобы в заданные моменты времени получались намеченные автором спектр сигнала, распределение громкости по пространству и т. п. Музыкальный манифест Ксенакиса — книга «Formalized Music» (1963), русский перевод — «Формализованная музыка» (2008). В частности, в книге разбираются возможности применения в сочинении и изучении музыки таких разделов математики как теория множеств, теория вероятностей, теория информации, теория игр.

Алгоритмика. Алгоритмической музыкой (алгоритмической музыкальной композицией) называют процесс создания музыкальных отрывков, последовательностей и композиций с помощью математических моделей, правил и алгоритмов. Музыка и математика

как область исследований лежит на стыке двух таких разных дисциплин как музыкальная наука (в частности, гармония) и искусственный интеллект и системный анализ.

Как известно, алгоритмом называется набор инструкций, описывающих порядок действий исполнителя для достижения поставленной цели за конечное число шагов. Если к входным данным применяется последовательно один и тот же алгоритм, то такой процесс называется итерационным. В математике самый употребительный вариант итерационного процесса — нахождение решения задачи методом последовательных приближений. Возможен и «исследовательский», поисковый вариант процесса, в котором отсутствует заранее намеченная цель.

Творческий процесс не может быть представлен в виде алгоритма. Тем не менее, особенно в современной музыке, возникновению у композитора идеи сочинения может предшествовать большая подготовительная работа, связанная с формальными вычислениями. Например, композитор задумал создать последовательность аккордов, обладающую определёнными свойствами. Такая последовательность может быть получена с помощью некоторого итерационного процесса. Конечно, полученная последовательность не будет музыкальным сочинением, но может рассматриваться как набор «кирпичей», из которых композитор будет создавать своё сочинение.

Целью французского композитора Тристана Мюроя в сочинении «D'esint'egration» (1982) было получение последовательности аккордов с постепенно «расстраивающимся» соотношением между нотами. Начальный аккорд представлял из себя набор из 12 гармоник с рациональными соотношениями между частотами. В созданном композитором итерационном процессе, на каждом шаге аккорд изменялся совсем немного, но при этом у нот аккорда ухудшались соотношения частот, а длительность и время начала звучания — искажались.

Мы рассмотрели лишь некоторые «музыкально-творческие» способности математики. Новая жизнь подобных подходов к написанию музыки связана с появлением мощной и доступной компьютерной техники.

Начиная с середины 1990-х годов появилось множество компьютерных программ для анализа и создания музыкальных произведений. Например, есть секвенцерные программы, сохраняющие и расширяющие возможности классической нотации. В них сохраняется принцип последовательного считывания мелодии, а расширение состоит в том, что на параллельных дорожках могут быть написаны как ноты для обычных инструментов, так и специально подготовленные искусственные звуки. Подобные звуки создаются заранее с использованием гармонического анализа и других

способов синтеза. Например, известной секвенцерной программой является программа LogicPro компании Apple.

Современные компьютерные инструменты, помогающие композитору, меняют и само понятие «музыка». Теперь музыкальное произведение может быть предъявлено не только перечислительно, например, в виде нотной записи или на барабане шарманки, но и в виде кода компьютерной программы, генерирующей это музыкальное произведение. Например, произведение «D'esint'egration» написано с помощью программы, включающей такие привычные для любого программиста объекты как циклы. Для композиторов, использующих математические идеи, разработаны системы программирования с удобным и красивым интерфейсом, являющиеся аналогом обычных языков программирования (LISP, FORTRAN, C). Подобная система может представить результат своей работы по выполнению кода программы в виде нотной записи, а может и выступить в роли исполнителя. Такой, например, является система OpenMusic, разработанная в парижском институте исследования музыкальной акустики.

Особый тип программ — интерактивные, т. е. такие, параметры которых могут меняться во время воспроизведения звука. Например, так работают программы, создающие видеоряд при исполнении музыкального произведения. Датчики, установленные на музыкальных инструментах, передают данные на компьютер, и установки программы меняются. К такому типу относится программа Max.

Данная работа представляет собой исследование музыкальных произведений статистическими методами на примере менуэтов 17 – 18 века. На основе полученных данных сделан вывод о принадлежности всех произведений к одной исторической эпохи и одному музыкальному направлению (полифония). Проведенное исследование показало, что полученные результаты в целом соответствуют выводам полученные Вильгельмом Фуксом.

Главной целью является поиск созвучий, подходящих друг другу по функциональной принадлежности и овладения творческим умением даже в простейшем гармоническом упражнении увидеть миниатюрное музыкальное произведение. В заключение приведём слова Леонардо да Винчи: «Nissuna humana investigatione si po dimandare vera scientia, s'essa non passa per le mattematiche dimostrationsi» (ни одно человеческое исследование не может назваться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства).

Список литературы

<https://book.etudes.ru/toc/music/>

https://gorbunova.herzen.spb.ru/wp-content/uploads/%D1%81%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8%20%D1%81%20%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D1%8F%D0%BD%D1%8B%D0%BC%20%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BC/%D0%9C%D1%83%D0%B7%2C%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%2C%20%D0%B8%D0%BD%D1%84-%D0%BA%D0%B0.pdf?_t=1523351142
http://n-sh.org/public/storage/data/GK/GK_2017/i_m_f/0056aa9fb25b87fbfbcc6b8adf2fa326.pdf
<http://rep.bgam.edu.by/xmlui/bitstream/handle/123456789/908/Meshherjakova.pdf?sequence=1&isAllowed=y>