УДК-51.7

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Шумаков Е.А. , Ефимцева И. Б.

ФГБОУ ВО «Курский государственный университет», колледж коммерции, технологий и сервиса, Россия, Курск e-mail: zhenya.shumakov.85@mail.ru

Линейное программирование - математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения экстремальных задач на множестве n-мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств.

RESEARCH OF SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Shumekov E.A. , Efimtseva I.B.

FGBOU VO «Kursk state University», College of Commerce, technology and service, Russia, Kursk e-mail: zhenya.shumakov.85@mail.ru

Linear programming is a mathematical discipline devoted to the theory and methods of solving extreme problems on a set of n-dimensional vector space defined by systems of linear equations and inequalities.

Что же такое линейное программирование? Это один из первых и наиболее подробно изученных разделов математического программирования. Именно линейное программирование явилось тем разделом, с которого начала развиваться сама дисциплина «математическое программирование». Термин «программирование» в названии дисциплины ничего общего с термином «программирование (т.е. составление программ) для ЭВМ» не имеет, так как дисциплина «линейное программирование» возникла еще до того времени, когда ЭВМ стали широко применяться при решении математических, инженерных, экономических и других задач. В настоящее время линейное программирование является одним из наиболее употребительных аппаратов математической теории оптимального принятия решения.

Важным фактором, определяющим роль математики в различных приложениях, является возможность описания наиболее существенных черт и свойств изучаемого объекта на языке математических символов и соотношений. Такое описание принято называть математическим моделированием или формализацией.

Математической моделью реального объекта (явления) называется ее упрощенная, идеализированная схема, составленная с помощью математических символов и операций (соотношений).

Следовательно, для получения математической модели сначала вводится система буквенных обозначений элементов реального объекта и затем, на основе изучения существующих взаимосвязей между этими элементами, составляются отражающие их математические соотношения (уравнения, неравенства и др.).

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование - наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования. Это объясняется следующим:

- математические модели очень большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- эти типы задач в настоящее время наиболее изучены;
- для них разработаны специальные конечные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие стандартные программы для их решения на ЭВМ;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли уже сейчас широкое практическое применение в народном хозяйстве;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Итак, линейное программирование – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции F), которые удовлетворяют системе ограничений, называется допустимым планом задачи линейного программирования. Функция F, максимум или минимум которой определяется, называется целевой функцией задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции F, называется оптимальным планом задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование не отрицательности переменных.

Двумерные задачи линейного программирования решаются графически. Для случая N=3 можно рассмотреть трехмерное пространство и целевая функция будет достигать своё оптимальное значение в одной из вершин многогранника.

В общем виде, когда в задаче участвуют N-неизвестных, можно сказать, что область допустимых решений, задаваемая системой ограничивающих условий, представляется выпуклым многогранником в n-мерном пространстве и оптимальное значение целевой функции достигается в одной или нескольких вершинах. Решить данные задачи графически, когда количество переменных более 3 весьма затруднительно. Существует универсальный способ решения задач линейного программирования, называемый симплекс-методом.

Пример 1

Задача. Ткацкая фабрика производит ткань двух артикулов. Для производства 10 тыс. м^2 ткани 1-го артикула фабрике необходимо 1 т тонковолокнистого и 3 т средневолокнистого хлопка, а для выпуска 100 тыс. м^2 ткани 2-го артикула – соответственно 5 и 6 т такого же хлопка. Поставки тонковолокнистого хлопка не превышают 80 т, а средневолокнистого – 150 т. По плану фабрика должна произвести не менее 60 тыс. м^2 ткани 1-го артикула и 800 тыс. м^2 ткани 2-го артикула. Прибыль фабрики от продажи 10 тыс. м^2 ткани 1-го артикула составляет 1,6 тыс. руб., а от продажи 100 тыс. м^2 ткани 2-го артикула – 6 тыс. руб. Предполагая, что вся произведенная ткань будет распродана, определить оптимальный план производства ткани, обеспечивающий получение наибольшей прибыли.

Решение. Для решения поставленной задачи необходимо построить её математическую модель. Осуществим это построение поэтапно.

1-й этап. Выберем целевую функцию задачи. В данном примере она указана в условии: прибыль от продажи ткани.

2-й этап. Выберем управляемые переменные: x_1 – количество вырабатываемой ткани 1-го артикула (10 тыс. м^2), x_2 – количество вырабатываемой ткани 2-го артикула (100 тыс. м^2). Выбор разных единиц измерения для x_1 и x_2 позволяет выполнить весь последующий анализ в более удобном масштабе.

3-й этап. Осуществим выделение и формализацию ограничений. Это будут ограничения по количеству используемого средневолокнистого и тонковолокнистого хлопка, которые не могут превысить установленные размеры поставок, и ограничения по объемам производства, которые не могут быть ниже установленных плановых показателей. Общее необходимое количество тонковолокнистого хлопка при объемах производства ткани 1-го и 2-го артикулов x_1 и x_2 равно $x_1 + 5x_2$, а ограничение имеет вид

$x_1 + 5x_2 \leq 80$.

Аналогичное ограничение для средневолокнистого хлопка

$3x_1 + 6x_2 \leq 150$.

Ограничения, вытекающие из требования выполнения плана, имеют вид: $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 8$.

При формализации ограничений необходимо следить за размерностью получаемых величин. В данном случае это требование выполнено. Кроме уже построенных вводятся очевидные по физическому смыслу ограничения – условия неотрицательности переменных:

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

В данном примере они выполняются автоматически за счет ранее введенных ограничений, но так бывает не всегда. Поэтому на учет условий неотрицательности надо обращать особое внимание. Целевая функция может быть выражена через переменные x_1 и x_2 следующим образом:

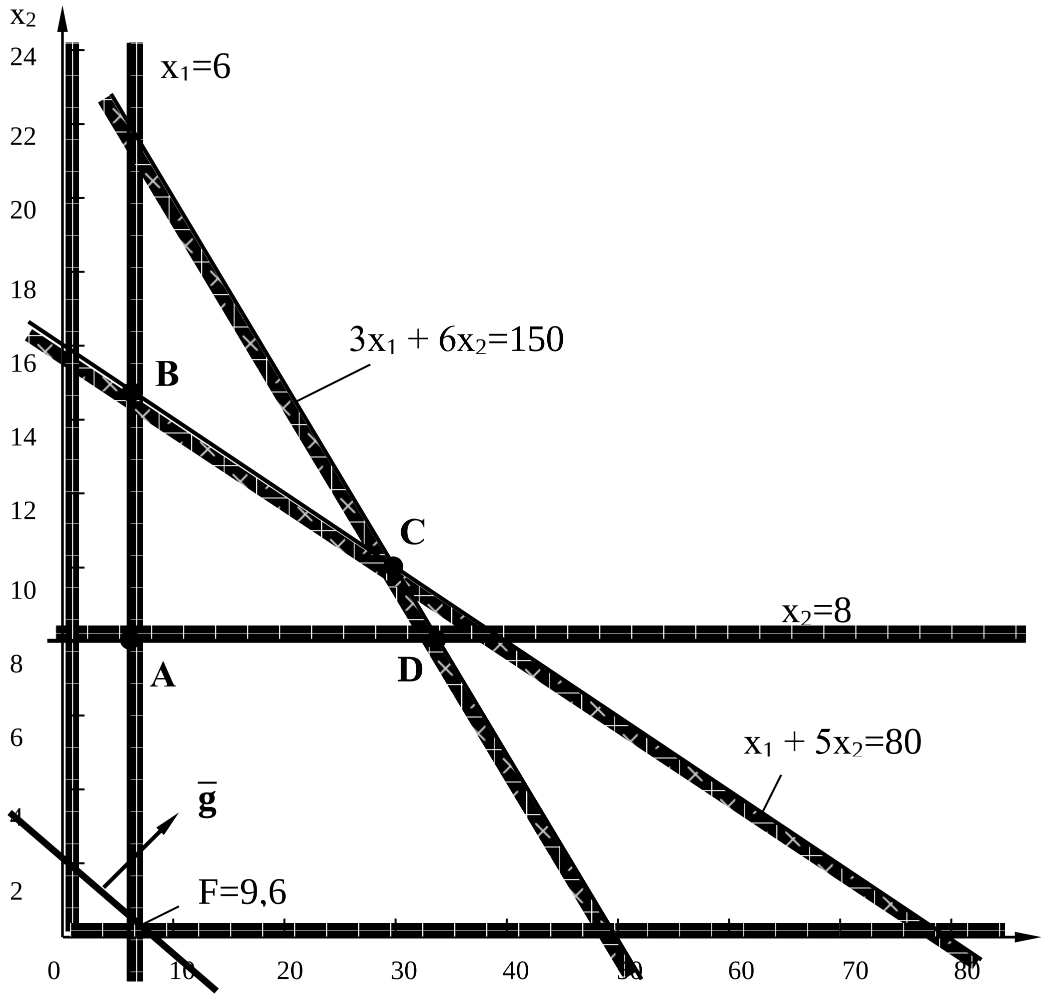
$F(x_1, x_2) = 1{,}6\ x_1 + 6\ x_2$.

Все эти соотношения образуют оптимизационную математическую модель задачи, в которой необходимо найти такие x_1 и x_2, которые удовлетворяли бы всем ограничениям одновременно (были допустимыми) и при этом давали бы функции $F(x_1, x_2)$ максимальное значение среди всех возможных допустимых x_1 и x_2. Эта модель и будет моделью линейного программирования.

Решим задачу линейного программирования геометрически. Прямые, ограничивающие допустимые области для каждого из ограничений, отмечены на рис. 1.

Допустимой областью задачи является четырехугольник ABCD. На рис.1. построена линия уровня целевой функции для уровня c=9,6. Так как целевая функция максимизируется, то значение функции возрастает в направлении вектора $\bar{g} = \mathrm{grad}F = (1{,}6;6)$. Приходим к выводу, что оптимальному решению отвечает точка С, координаты которой можно определить, решая совместно уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 80, \\ 3x_1 + 6x_2 = 150. \end{cases}$$



Отсюда $x_1=30$, $x_2=10$, при этом F=108.

Рис.1. Область допустимых решений

Пример 2

Задача. Ткацкая фабрика располагает 300 станков первого типа и 200 станков второго типа. Станки могут вырабатывать два вида ткани. Каждый вид станка может производить любой вид ткани, но в неодинаковом количестве. Станок первого типа производит в единицу времени 10 м ткани первого вида и 8 м ткани второго типа, а станок второго вида – соответственно 8 и 6 м ткани.

Каждый метр ткани первого вида приносит фабрике прибыль 2 руб. и второго вида – 3 руб. Согласно плану производства фабрика обязана выпустить в единицу времени не менее 2700 м ткани первого вида и 1400 – второго вида. Требуется так распределить загрузку станков, чтобы был выполнен план, и при этом прибыль в единицу времени была максимальной.

Решение. Введем обозначения: x_1, x_2 – число станков первого и второго типа, производящих ткань первого вида, x_3, x_4 – число станков первого и второго типа, производящих ткань второго вида.

Целевой функцией в этой задаче является общая прибыль предприятия:

$F(x) = F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(10x_1 + 8x_2) + 3(8x_3 + 6x_4) = 20x_1 + 16x_2 + 24x_3 + 18x_4$

При этом должны выполняться следующие ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \le 300, \\ x_2 + x_4 \le 200, \\ 10x_1 + 8x_2 \ge 2700, \\ 8x_3 + 6x_4 \ge 1400, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Решим задачу симплекс – методом. Введем дополнительные переменные x_5, x_6, x_7, $x_8 \ge 0$, так чтобы система неравенств превратилась в систему равенств. Ограничения примут вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 300, \\ x_2 + x_4 + x_6 = 200, \\ 10x_1 + 8x_2 - x_7 = 2700, \\ 8x_3 + 6x_4 - x_8 = 1400, \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,8}. \end{cases}$$

Так как в системе ограничений нет очевидного базиса (т.е. нет решения, где бы базисные переменные были положительны), используем М – метод. Введем искусственные переменные $x_9 \ge 0$, $x_{10} \ge 0$ для получения очевидного базиса. За использование этих переменных в целевой функции введем штраф $-M(x_9 + x_{10})$. Пусть для определенности M=100.Выразим x_9 и x_{10} из уравнений ограничений и подставим в целевую функцию. Исходная симплекс – таблица примет вид:

Таблица .1

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Св.ч
F	1020	816	824	618	0	0	-100	-100	0	0	--
x_5	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	300
x_6	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	200
x_9	10	8	0	0	0	0	-1	0	1	0	2700
x_{10}	0	0	8	6	0	0	0	-1	0	1	1400

Т.к. $F(x) \to \max$, то избавляться надо от положительных слагаемых. Найдем отношения $\min\left\{\frac{300}{1}, \frac{2700}{10}\right\} = 270$.Разрешающий элемент находится в четвертой строке первом столбце. Разделим четвертую строку на 10. Затем вычтем из первой строки четвертую, умноженную на 1020, вычтем из второй строки четвертую. Получим таблицу.

Таблица .2

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Св.ч
F	0	0	824	618	0	0	2	-100	-102	0	--
x_5	0	-0,8	1	0	1	0	0,1	0	0,1	0	30
x_6	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	200
x_1	1	0,8	0	0	0	0	-0,1	0	0,1	0	270
x_{10}	0	0	8	6	0	0	0	-1	0	1	1400

Найдем отношения $\min\left\{\frac{30}{1}, \frac{1400}{8}\right\} = 30$. Разрешающий элемент находится во второй строке третьем столбце. Вычтем из первой строки вторую, умноженную на 824, вычтем из пятой строки вторую, умноженную на 8. Получим таблицу.

Таблица 3

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Св.ч
F	0	659,2	0	618	-824	0	-80,4	-100	-19,6	0	--
x_3	0	-0,8	1	0	1	0	0,1	0	-0,1	0	30
x_6	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	200
x_1	1	0,8	0	0	0	0	-0,1	0	0,1	0	270
x_{10}	0	6,4	0	6	-8	0	-0,8	-1	0,8	1	1160

Найдем отношения $\min\left\{\frac{200}{1}, \frac{270}{0{,}8}, \frac{1160}{6{,}4}\right\} = 181,\ 25$. Разрешающий элемент находится в пятой строке втором столбце. Вычтем из первой строки пятую, умноженную на 659,2; прибавим ко второй строке пятую, умноженную на 0,8; вычтем из третьей строки пятую; вычтем из четвертой строки пятую, умноженную на 0,8. Получим таблицу.

Таблица 4

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Св.ч
F	0	0	0	0	0	0	2	3	-102	-103	--
x_3	0	0	1	0,75	0	0	0	-1/8	0	1/8	175
x_6	0	0	0	1/16	5/4	1	1/8	5/32	-1/8	-5/32	75/4
x_1	1	0	0	-3/4	1	0	0	1/8	0	1/8	125
x_2	0	1	0	15/16	-5/4	0	-1/8	-5/32	1/8	5/32	725/4

Найдем отношения $\min\left\{\frac{75/4}{5/32}, \frac{125}{1/8}\right\} = 120.$ Разрешающий элемент находится в третьей строке девятом столбце. Разделим третью строку на Вычтем из первой строки третью, умноженную на 3; прибавим ко второй строке третью, умноженную на 1/8; вычтем из четвертой строки третью, умноженную на 1/8; прибавим к пятой строке третью, умноженную на 5/32. Получим таблицу.

Таблица 5

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Св.ч
F	0	0	0	-1,2	-24	-19,2	-0,4	0	-99,6	-100	--
x_3	0	0	1	0,8	1	0,8	0,1	0	-0,1	0	190
x_8	0	0	0	0,4	8	6,4	0,8	1	-0,8	-1	120
x_1	1	0	0	-0,8	0	-0,8	-0,1	0	0,1	0	110
x_2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	200

Так как в строке для F нет положительных слагаемых, то оптимальное решение получено. Значения переменных:

$x_1 = 110$, $x_2 = 200$, $x_3 = 190$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$, $x_8 =120$, $x_9 = 0$, $x_{10}=0$. При этом значение функции равно $F = 20x_1 + 16x_2 + 24x_3 + 18x_4 = 20\cdot110 +16\cdot200 + 24\cdot190 + 18\cdot0 = 9960$.

Список литературы:

1. Абрамов Л.М., Капустин В.Ф. Математическое программирование. Л., Изд-Ленингр. ун-та, 2010.

2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Высш. шк.,1993.

3. Ашманов С.А.Линейное программирование. - М.: Наука, 2011.

4. Баканов М.И., Шеремет А.Д. Теория экономического анализа: Учебник. -4-е изд., доп. и перераб. - М.: Финансы и статистика, 2000.

5. Баканов М.И., Шеремет А.Д.Экономический анализ: ситуации, тесты, примеры, задачи, выбор оптимальных решений, финансовое прогнозирование: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 2009.

6. Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 2009..

7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы линейного программирования. Ч.1. Общие задачи, Минск, Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 2007..

8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы линейного программирования. Ч.2. Транспортные задачи, Минск, Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 2007..