УДК: 57.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Кушманов Р.С.

ФГБОУ ВО «Курский государственный университет», колледж коммерции, технологий и сервиса, Россия, Курск, e-mail: rkushmanov@mail.ru, irinaivanova2510@mail.ru

Эмпирические исследования используются для ответа на эмпирические вопросы, которые должны быть точно определены в соответствии с данными. Как правило исследователь имеет определённые теории по теме проводящегося исследования. На основании этой теории предлагаются определённые предположения либо гипотезы. Из этих гипотез делается прогнозирование конкретных событий. Эти прогнозы могут быть проверены соответствующими экспериментами. В зависимости от результатов эксперимента, теории, на которых гипотезы и прогнозы были основаны, будут подтверждаться либо опровергаться.

Ключевые слова: метод выбранных точек, метод средних, метод наименьших квадратов, выяснение общего вида этой формулы, определение наилучших параметров ее.

UDC: 57.1

RESEARCH OF EMPIRICAL FORMULAS

Kushmanov R. S.

Kursk state University, College of Commerce, technology and service, Kursk, Russia, e-mail: rkushmanov@mail.ru, irinaivanova2510@mail.ru

Empirical research is used to answer empirical questions that need to be precisely defined according to the data. As a rule, the researcher has certain theories on the topic of the ongoing research. Based on this theory, certain assumptions or hypotheses are proposed. These hypotheses are used to predict specific events. These predictions can be verified by appropriate experiments. Depending on the results of the experiment, the theories on which the hypotheses and predictions were based will be confirmed or disproved.
Keywords: the method of selected points, the method of averages, the method of least squares, finding out the General form of this formula, determining the best parameters of it.

Одной из важных задач при исследовании различных процессов является установление количественной зависимости между величинами x и y, характеризующими данный процесс, т.е. получение функциональной зависимости

$$y = \tilde{f}(x). \tag{1.1}$$

В большинстве случаев эта зависимость в результате эксперимента оказывается заданной при помощи таблицы

Таблица 1.1

Экспериментальные данные

№ опыта	1	2	…	n
x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Если аналитическое выражение неизвестно или весьма сложно, то возникает практически важная задача: найти эмпирическую формулу

$$y = f(x, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_k), \tag{1.2}$$

где f – известная функция, $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ - неизвестные параметры, которые требуется определить, при этом $k < n$ (2.2) должна достаточно точно отражать исследуемый процесс.

Если значения (x_i, y_i) точно связаны зависимостью (1.2), то параметры $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ могут быть найдены как решение системы

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f(x_1, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_k), \\ y_2 = f(x_2, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_k), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f(x_n, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_k). \end{array}\right\}. \tag{1.3}$$

Однако, на практике экспериментальные значения (x_i, y_i) содержат неизбежные ошибки и число уравнений системы (1.3) значительно больше числа неизвестных $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$, поэтому система (1.3), как правило, является несовместной. Приходится отыскивать наилучшие значения $b_0, b_1, ..., b_k$ приближенно удовлетворяющие системе (1.3), т.е. такие когда невязки (уклонения, отклонения).

$$\Delta y_i = f(x_i, b_0, b_1, ..., b_k) - y_i \quad i = \overline{1, n} \tag{1.4}$$

являются возможно малыми по абсолютной величине. Существуют различные критерии малости уклонений.

Наиболее распространенными являются эмпирические формулы, линейно зависящие от параметров, т.е. формулы вида

$$y = b_0 \cdot \varphi_0(x) + b_1\varphi_1(x) + \ldots + b_k \cdot \varphi_k(x), \qquad (1.5)$$

где $\varphi_i(x)$ - известные функции.

В этом случае система (1.3) линейная и исследование ее сравнительно просто. В случае, когда параметры входят в эмпирическую формулу нелинейно, путем введения новых переменных производят линеаризацию или выравнивание.

Существуют следующие методы определения параметров эмпирической формулы:

1) метод выбранных точек;
2) метод средних;
3) метод наименьших квадратов.

Наилучшие параметры эмпирической формулы будем находить по методу наименьших квадратов, как наиболее часто употребимым.

Построение эмпирической формулы слагается из двух этапов:

1) выяснение общего вида этой формулы;
2) определение наилучших параметров ее.

Если неизвестен характер зависимости между x и y, то вид эмпирической формулы является произвольным. Предпочтение отдается простым формулам, обладающим хорошей точностью. При этом лучшей считается формула, для которой

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2}{n - k - 1} \qquad (1.6)$$

имеет меньшее значение. Здесь $\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2$ - сумма квадратов уклонений, n – число экспериментальных данных, k+1 – число параметров эмпирической формулы.

В большинстве случаев можно ограничиться следующими типами функциональных зависимостей, представленных в табл. 1.2.

В некоторых случаях выбор типа эмпирической формулы может быть произведен на основе теоретических представлений о характере изучаемой зависимости. В других случаях приходится подбирать формулу, сравнивая, построенную по экспериментальным данным с образцами известных кривых, приведенных в справочниках. Для функциональных зависимостей типа I – VII в табл.1.3 приведены необходимые условия их (предполагается, что $x_i > 0, y_i > 0$).

Таблица 1.2

Функциональные зависимости

Тип	Вид зависимости	Тип	Вид зависимости
I	$y = ax + b$	II	$y = a \cdot x^b$
III	$y = a \cdot e^{bx}$	IV	$y = \frac{1}{ax + b}$
V	$y = \frac{x}{ax + b}$	VI	$y = a \ln x + b$
VII	$y = a + \frac{b}{x}$	VIII	$y = a \cdot x^2 + bx + c$
IX	$y = e^{ax^2 + bx + c}$	X	$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$
XI	$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$	XII	$y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}$
XIII	$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$	XIV	$y = a + b \ln x + c \ln^2 x$

Таблица 1.3.

Необходимые условия наличия эмпирических зависимостей типа I-VII

Тип	$\bar{x}_S$	$\bar{y}_S$	Вид эмпирической формулы	Способ выравнивания
1	2	3	4	5
I	$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\frac{y_1 + y_n}{2}$	$y = ax + b$	
II	$\sqrt{x_1 x_n}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = a \cdot x^b$	$Y = \alpha + bX$, где $X = \ln x, Y = \ln y,$ $\alpha = \ln a$
III	$\frac{x_1 + x_n}{2}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = a \cdot e^{bx}$	$Y = \alpha + bx$, где $Y = \ln y, \alpha = \ln a$

IV	$\dfrac{x_1 + x_n}{2}$	$\dfrac{2y_1y_n}{y_1 + y_n}$	$y = \dfrac{1}{ax + b}$	$Y = \alpha x + b$, где $Y = \dfrac{1}{y}$
V	$\dfrac{2x_1x_n}{x_1 + x_n}$	$\dfrac{2y_1y_n}{y_1 + y_n}$	$y = \dfrac{x}{ax + b}$	$Y = ax + b$, где $Y = \dfrac{x}{y}$
VI	$\sqrt{x_1x_n}$	$\dfrac{y_1 + y_n}{2}$	$y = a\ln x + b$	$Y = a \cdot X + b$, где $X = \ln x$
VII	$\dfrac{2x_1x_n}{x_1 + x_n}$	$\dfrac{y_1 + y_n}{2}$	$y = a + \dfrac{b}{x}$	$Y = ax + b$, где $Y = xy$

Для проверки определенной эмпирической формулы находят соответствующее значение $\bar{x}_S$, затем по табл.1.1 определяют y_y, соответствующее значению $\bar{x}_S$, которое сравнивают со значением $\bar{y}_S$, помещенным в табл.1.3. Предпочтительнее та эмпирическая формула, для которой расхождение $|\bar{y}_S - y_y|$ возможно мало. Для окончательного выбора следует учесть также промежуточные данные.

Замечание. Если значение $\bar{x}_S$ не находится среди исходных данных x_i, то соответствующее значению $\bar{x}_S$ значение y_y определяют посредством линейной интерполяции

$$y_y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(\bar{x}_S - x_i), \qquad (1.7)$$

где x_i и x_{i+1}– промежуточные значения, между которыми содержится $\bar{x}_S$, т.е. $x_i < \bar{x}_S < x_{i+1}$.

Следует иметь ввиду, что эти условия являются лишь необходимыми. Кроме того, не учитывается поведение всех эмпирических данных (x_i, y_i); табл.1.3 содержит лишь семь типов зависимостей и может случится, что x и y связаны между собой функциональной зависимостью, не содержащейся в табл.1.3.

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, т.1, 1978.

2. Демидович Б.П. и др. Численные методы анализа. М.: Физмат, 1963.

3. Данилина Н.И. и др. Численные методы. М.: Высш.шк. , 1976.

4. Баврин, И. И. Математика для технических колледжей и техникумов : учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 397 с.

5. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с.