УДК 372.851

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОБЛЕМНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «ОКРУЖНОСТЬ. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ»

Мирошниченко М.Н.

Шуйский филиал Ивановского государственного университета, Россия, Шуя, e-mail: masha790meta.ua@mail.ru

В статье представлены методические рекомендации по введению основных понятий тем «Окружность» и «Касательная к окружности» на основе принципов проблемного обучения. Они являются результатом анализа и общения педагогических и методических работ учёных Н.М.Бескина, И.М.Смирнова, В.М.Финкельштейна, А.Я.Хинчина, В.Г.Чичигина и других. Автором представлен план эвристической беседы и проблемные задания по исследованию школьниками понятия «Касательная к окружности». Описаны приёмы организации учебной деятельности обучающихся 7 классов по исследованию проблемы о взаимном расположении касательной к окружности и радиуса, проведённого в точку касания. Автор исходит из положения о том, что обучающиеся должны принимать активное участие в составлении определений геометрических фигур. Показывает возможность реализации этого положения на примере темы «Касательная к окружности». Комплекс проблемных заданий на построение окружностей, с учётом заданного условия, является авторской разработкой. Этот комплекс способствует развитию знаний об элементах окружности (центр, радиус, хорда, диаметр, дуга окружности), умения строить окружности, проходящие через заданные точки. Он может быть использован на уроках геометрии по теме «Окружность» в 7-8 классах системы общего образования.

Ключевые слова: методы проблемного обучения, проблемные задания по геометрии, окружность, касательная к окружности, свойства касательной к окружности.

METHODOLOGICAL FEATURES OF THE IMPLEMENTATION OF PROBLEM-SOLVING TASKS ON THE TOPIC "CIRCUMFERENCE. TANGENT TO THE CIRCLE»

Miroshnichenko M. N.

Shuya branch of Ivanovo state University, Russia, Shuya, e-mail: masha790meta.ua@mail.ru

The article presents methodological recommendations for the introduction of the basic concepts of the topics "Circle" and" Tangent to a circle " based on the principles of problem-based learning. They are the result of the analysis and communication of pedagogical and methodological works of scientists N. M. Beskin, I. M. Smirnov, V. M. Finkelstein, A. Ya. Khinchin, V. G. Chichigin and others. The author presents a plan of heuristic conversation and problem tasks for students to study the concept of "Tangent to a circle". Methods of organization of educational activities of students of 7 classes on the study of the problem of the mutual location of the tangent to the circle and the radius drawn to the point of contact are described. The author proceeds from the position that students should take an active part in the preparation of definitions of geometric shapes. Shows the possibility of implementing this provision on the example of the topic "Tangent to a circle". The complex of problem tasks for constructing circles, taking into account a given condition, is the author's development. This complex contributes to the development of knowledge about the elements of a circle (center, radius, chord, diameter, arc of a circle), the ability to build circles passing through specified points. It can be used in geometry lessons on the topic "Circle" in grades 7-8 of the general education system.

Keywords: methods of problem-based learning, problem tasks in geometry, circle, tangent to circle, properties of tangent to circle.

Математическое образование, получаемое в школе, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры человека. Учебные математические предметы уникальны в решении проблемы формирования, развития, воспитания и коррекции личности, так как развивающий потенциал математики огромен. Ведущей целью математического образования является интеллектуальное развитие школьников, формирование особых качеств мышления, необходимых человеку для полноценной жизни в социуме. Математика в школе служит опорным предметом для изучения смежных дисциплин (физики, химии, информатики, географии, технологи).

Изучение окружностей является одной из основополагающих тем раздела планиметрии. В курсе основой школы «Окружность» изучается в 7-8 классах. Знания, полученные в результате изучения данной темы, в дальнейшем широко используются, как в геометрии, так и в других школьных дисциплинах.

Окружность является одной из самых распространенной кривых во всех областях науки и человеческой деятельности. Она уникальна тем, что каждая ее точка равноудалена от центра. Развитие теории окружностей способствовало развитию тригонометрии, теории колебаний и многих других отраслей науки и техники. В этом и заключается актуальность данной темы.

Методические рекомендации, описанные в данной статье, могут быть использованы начинающими преподавателями математики в своей деятельности и студентами в ходе педагогической практики.

И.М. Смирнова и В.А. Смирнов в своей программе утверждают, что основными целями обучения геометрии в предметном направлении являются: получение геометрических знаний и практических навыков, которые необходимы для дальнейшего образования, изучения смежных наук, применения в повседневной жизни, а так же формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности, как фундамент для дальнейшего математического развития [3].

С понятием «окружность» учащиеся сталкиваются в седьмом классе. Окружность – единственная из кривых линий, рассматриваемая в элементарном курсе геометрии [2, с. 129]. Изучение окружности рекомендуется начать с систематизации сведений, знакомых учащимся из курса математики предыдущих классов.

Введение понятия «окружность» не требует каких-то особенных приготовлений. Необходимо последовательно дать определение окружности и основных ее элементов: центра, радиуса, хорды, диаметра. Теоретическая часть изучения данной темы обычно не вызывает затруднений у школьников.

Важно научить учащихся выполнять построение окружности, закрепить на практике представление об окружности.

Касательную к окружности в курсе геометрии основной школы изучают в седьмом, либо в восьмом классе. Некоторые авторы учебников сразу дают готовое определение касательной, другие же сначала рассказывают о всех возможных случаях взаимного расположения прямой и окружности, и на основе этого вводят определение касательной.

При изучении взаимного расположения окружности и прямой важное методическое значение имеет теорема о том, что окружность не может иметь более двух общих точек с прямой, способствующая разрушению неправильных интуитивных представлений, что является одной из целей преподавания математики [1, с. 147].

Автор многих статей по методике преподавания математики В.М.Финкельштейн считает, что проблемой является то, что в школьных учебниках геометрии учащимся предлагается готовое определение касательной [5]. Так как школьники не участвуют в составлении определения, у них не остается другого выхода, кроме как заучивать его.

Для того чтобы учащиеся не просто выучили, но и поняли, крепко усвоили новый материал, учителю нужно заинтересовать их и привлечь к его открытию. Одним из способов сделать это является совместная работа учителя и учеников. Роль учителя будет состоять в задании наводящих вопросов. Если ученики не могут сразу ответить на поставленный им вопрос, учитель предлагает более «прозрачный» вопрос.

Учитель: До того, как мы начнем изучать новую тему, предлагаю Вам решить подготовительную задачу. На доске начерчен рисунок. Посмотрите на него и ответьте: сколько общих точек имеют две прямые – параллельные, пересекающиеся и совпадающие (Рис. 1)?

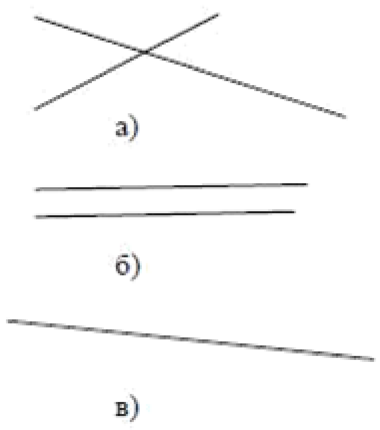

Рис. 1. Параллельные, пересекающиеся и совпадающие прямые

Обучающиеся: Если прямые параллельны, то они не имеют общих точек. Если прямые пересекаются, то у них одна общая точка. Если прямые совпадают, то у них общих точек бесконечно много.

Учитель: Верно. Переходим к прямой и окружности. Для начала решим задачу. Постройте в своих тетрадях прямую и окружность. Какого их взаимное расположение?

Обучающийся: Я построил два рисунка, на одном из них прямая пересекает окружность, а на другом не пересекает.

Учитель: Это происходит из-за того, что прямые могут быть расположены по-разному. Важно обратить внимание на расстояние от центра окружности до прямой. Посмотрите на мой рисунок. Прямая может быть удалена от центра окружности на расстояние большее, чем ее радиус, меньшее, чем ее радиус и равное ее радиусу. Класс, на Ваш взгляд, какое количество общих точек с окружностью имеет прямая *a*, прямая *b* и прямая (Рис. 2)?

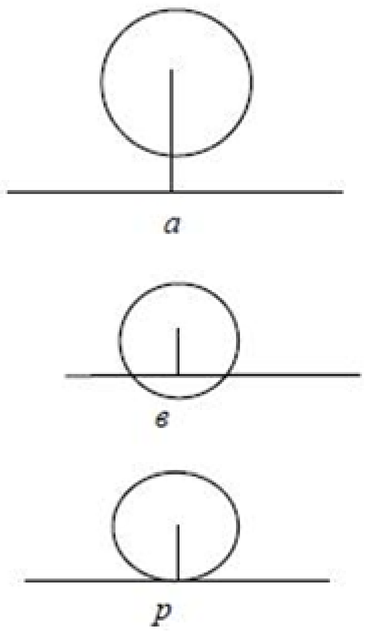

Рис. 2. Расположение прямой и окружности

Обучающиеся: Окружности и прямая *a* не имеют общих точек, прямая *b* имеет две общие точки с окружностью, а прямая р… Возможно, у них одна общая точка, а возможно, они имеют множество общих точек. Я не уверен.

Учитель: Нам принципиально важно знать, сколько общих точек имеет с окружностью прямая *p*. Для того, что прояснить данный вопрос, нам нужно разобраться, как получилась эта прямая. Для этого строим другую окружность. Отметим радиус *OA* и проведем прямую через центр окружности, перпендикулярно радиусу *OA*. Эта прямая пересекает окружность в двух точках: M_1 и M_2 (Рис. 3).

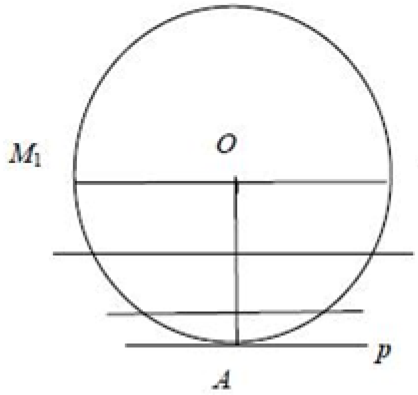

Рис. 3. Окружность с радиусом АО и прямой М1М2 , перпендикулярной радиусу

Далее мы будем двигать прямую M_1M_2 так, чтобы сблизить ее с точкой *A*, но, чтобы при этом прямая M_1M_2 оставалась перпендикулярной радиусу. Класс, скажите, что при этом происходит с точками пересечения прямой и окружности?

Обучающиеся: Точки сближаются друг с другом. Расстояние между ними уменьшается.

Учитель: К чему в конечном итоге приведет сближение точек, когда прямая M_1M_2 будет удалена от центра окружности на расстояние, точно равное радиусу окружности?

Обучающиеся: Полагаем, эти точки совпадут, соединятся в одну точку. Сейчас мы понимаем, для чего мы перемещали прямую M_1M_2. По всей видимости, окружность и прямая *p* имеют только одну общую точку.

Учитель: Хорошо, у нас появилось предположение. Запишем его: «Прямая, имеющая с окружностью общую точку и перпендикулярная ее радиусу, проведенному в эту точку, других общих точек с окружностью не имеет».

Но мы не можем быть уверены в правильности нашего предположения, пока не проверим его. Выполним рисунок. Нарисуем окружность (Рис. 4), построим радиус *OA*, и построим прямую *p*, перпендикулярную радиусу. Что дано, что требуется доказать?

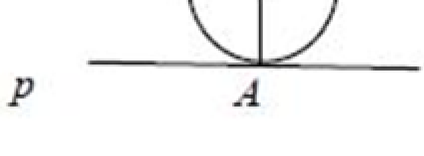

Рис. 4. Окружность с радиусом ОА и прямой р, перпендикулярной радиусу

Обучающиеся: Дана окружность, прямая *p*, их общая точка *A* и тот факт, что прямая *p* перпендикулярна радиусу *OA*. Мы должны доказать то, что любая другая точка прямой *p* не лежит на окружности.

Учитель: Посмотрим, какие данные мы имеем. Нам дана окружность. Кто вспомнит, каким свойством обладают точки окружности?

Обучающиеся: Все точки окружности равноудалены от центра.

Учитель: Как нам доказать, что любая другая точка прямой *p* не лежит на окружности?

Обучающиеся: Мы должны взять на прямой *p* другую точку и удостовериться, что расстояние от центра окружности до этой точки не равно радиусу окружности.

Учитель: Правильно. Берем на прямой *p* произвольную точку, не совпадающую с точкой *A,* скажем, точку *B*. Как мы можем найти расстояние от этой точки до центра окружности (Рис. 5)?

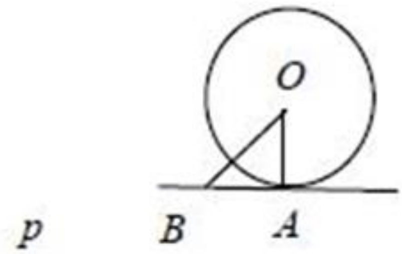

Рис. 5. Продолжение рисунка 4

Обучающиеся: Нужно соединить точку *B* с центром. Отложим отрезок *OB*. Теперь мы должны доказать, что отрезок *OB* не равен *OA*.

Учитель: *OA* – это перпендикуляр к прямой *p*. *OB* также является перпендикуляром?

Обучающиеся: Не является.

Учитель: Почему?

Обучающиеся: Потому что из точки *O* к прямой *p* возможно провести только один, единственный перпендикуляр. Следовательно, *OB* – наклонная.

Учитель: Верно. Получается, что из точки *O* к данной прямой проведены перпендикуляр *OA* и наклонная *OB*.

Обучающиеся: А наклонная всегда больше перпендикуляра. Из этого следует, что точка *B* удалена от центра на большее расстояние, чем точка *A*. А значит, мы можем сделать вывод, что она не лежит на окружности. Точка *A* – единственная общая точка прямой и окружности, что и требовалось доказать.

Учитель: Подведем итог: мы взяли произвольную точку прямой *p*, не совпадающую с точкой *A*. Мы доказали, что эта точка не лежит на окружности. Из этого следует, что все точки прямой *p*, за исключением точки *A*, не лежат на окружности. А значит, *прямая p и окружность имеют только одну общую точку*. Прямой, которая пересекает окружность только в одной точке, дали специальное название – касательная.

Определение касательной звучит так: «Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности в точке A». Только что проведенное нами доказательство показывает, что касательная к окружности действительно существует. В отличие от касательной, прямую, которая пересекает окружность в двух точках, называют секущей.

При данном подходе определение касательной для учеников не появляется из ниоткуда. Учитель, задавая наводящие вопросы, приводя примеры, помогает учащимся самим сначала высказать предположение о существовании единственной общей точки прямой и окружности, а затем и доказать этот факт. Лишь после этого учитель зачитывает определение.

Если же ученики сразу получат готовое определение, велика вероятность того, что они усвоят его не полностью. Еще известный и выдающийся математик и педагог Александр Яковлевич Хинчин писал, что усилия учителя должны быть направлены на то, чтобы побудить «школьника усваивать материал в порядке активной работы над ним, всеми средствами насыщая эту работу элементами самостоятельности и хотя бы скромного творчества» [6, с. 124].

Для закрепления понятий «окружность» и «касательная к окружности» и при проверке усвоения этих понятий в конце изучения темы можно предложить обучающимся 7 класса тест авторов И.М. Смирновой и В.А. Смирнова [4].

После введения определения касательной к окружности, можно перейти к введению ее свойств.

Начать необходимо с теоремы о свойстве касательной, а также с теоремы, обратной теореме о свойстве касательной. Эти теоремы изучаются в обязательном порядке в любом учебнике, так как являются основными по данной теме.

Автор учебника по методике преподавания математики, В.Г. Чичигин рекомендует также сделать акцент на изучение теоремы о том, что через три данные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну. Изучать эту теорему он предлагает при помощи решения задач [7].

Необходимо напомнить ученикам, что прямая линия на плоскости определяется или задается двумя точками.

Ставится такой же вопрос относительно окружности: сколько необходимо задать точек и как следует их расположить, чтобы через них можно было провести окружность и притом только одну?

Получить ответы на эти вопросы можно при помощи решения соответствующих задач.

Задача 1. Через данную точку на плоскости провести окружность.

Учащиеся выполняют эту работу и попутно выясняют, что данная задача имеет бесконечное множество решений. При этом становится понятно, что за центры окружностей можно принимать любую точку плоскости, кроме данной точки; в таком случае все окружности, проходящие через данную точку, могут иметь как равные, так и неравные радиусы.

Если же искомые окружности проводить одним и тем же радиусом, то легко заметить, что центры всех окружностей в этом случае будут лежать на окружности, проведенной тем же радиусом из данной точки как из центра; эта окружность есть геометрическое место точек – центров окружностей, проходящих через данную точку и имеющих равные радиусы.

Задача 2. Через две данные точки на плоскости провести окружность. Сделав предварительный анализ задачи, школьники приходят к следующим выводам: по условию задачи данные две точки должны лежать на искомой окружности, а значит, они должны быть равно удалены от центра той же окружности на расстояние, равное ее радиусу. Исходя из этого, центр искомой окружности будет лежать на перпендикуляре, проведенном из середины отрезка, соединяющего данные точки. Этот перпендикуляр является геометрическим местом точек, каждая из которых равно удалена от двух данных точек.

После проведения анализа легко определить и план решения задачи:

1) соединить отрезком данные точки;

2) разделить отрезок пополам, построив соответствующий перпендикуляр;

3) за центр искомой окружности принять произвольную точку построенного перпендикуляра;

4) радиусом, равным расстоянию выбранной точки до одной из данных точек, провести окружность с центром в выбранной точке.

После того, как учащиеся выполнят все эти построения, они получают искомую окружность, удовлетворяющую поставленным условиям, что можно легко доказать.

Исследовав решение этой задачи, учащиеся приходят к выводу, что задача имеет бесконечное множество решений.

Из анализа решения вытекают следующие выводы:

1) через две точки можно провести бесконечное множество окружностей;

2) их центры расположены на одной и той же прямой, перпендикулярной к отрезку, соединяющему две данные точки и проходящей через его середину;

3) эта прямая есть геометрическое место точек – центров всех окружностей, проходящих через две данные точки.

Задача 3. Через три данные точки, не лежащие на одной прямой, провести окружность.

Для того, чтобы построить искомую окружность надо определить положение ее центра и знать радиус. Приняв во внимание, что данные три точки не лежат на одной прямой, проведем следующий анализ:

1) для того, чтобы искомая окружность проходила через одну пару заданных точек, ее центр должен лежать на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка, соединяющего эту пару точек.

2) чтобы та же окружность проходила через вторую пару точек, центр ее должен лежать на втором перпендикуляре, проходящем через середину отрезка, соединяющего вторую пару точек.

3) наконец, чтобы искомая окружность проходила через обе пары точек, а значит, через три данные точки, ее центр должен находиться одновременно на обоих перпендикулярах, то есть в точке их пересечения.

По итогам анализа мы определили положение центра искомой окружности, а найти ее радиус не составит труда.

Теперь мы можем составить план решения данной задачи:

1) соединить отрезком одну пару данных точек;

2) построить перпендикуляр к нему через его середину;

3) соединить отрезком другую пару данных точек;

4) построить перпендикуляр к нему, проходящий через его середину;

5) принять точку пересечения обоих перпендикуляров за центр искомой окружности;

6) соединить его с одной из данных точек отрезком, который принимается за радиус искомой окружности;

7) построить окружность.

После того, как учащиеся выполнят построение, они смогут привести доказательство и исследование. При данных условиях задача всегда имеет решение, так как все этапы решения задачи выполнимы, а так как перпендикуляры могут пересечься только в одной точке, решение будет только одно.

Таким образом, по итогам решения трех задач можно сформулировать теорему: «Через три данные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну».

В результате полного изучения темы «Окружность», учащиеся должны знать и понимать определение окружности; уметь объяснять, что такое центр окружности, радиус, хорда, диаметр, дуга окружности; уметь строить окружность и основные ее элементы; знать возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности; знать определение касательной, свойства и теоремы по теме; уметь применять полученные знания на практике, при решении задач.

В данной статье представлены как методические рекомендации по введению основных понятий тем «Окружность» и «Касательная к окружности», так и по обучению основным свойствам и теоремам по теме. Методика введения понятия «Касательная к окружности» разработана в форме беседы, где ученики, путем наводящих вопросов учителя, сами приходят к определению касательной к окружности.

Список литературы:

1. Бескин, Н.М. Методика геометрии. – М: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещение РСФСР, 1947. – 276 с.
2. Гангнус, Р.В. Геометрия. Методическое пособие для высших педагогических заведений и преподавателей средней школы. / Р.В. Гангнус, Ю.О. Гурвиц. – М: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1934. – 321 с.
3. Смирнова, И.М. Геометрия. 7 класс. Методические рекомендации для учителя / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2015. – 272 с.
4. Смирнова, И.М. Геометрия. Дидактические материалы. 7 класс. / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2015. – 88 с.
5. Финкельштейн, В.М. Касательная к окружности // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2008. – №4. – С. 30-33.
6. Хинчин, А.Я. Педагогические статьи. – М.: Издательство академии педагогических наук РСФСР, 1963. – 203 с.
7. Чичигин, В.Г. Методика преподавания геометрии. Планиметрия. Пособие для учителей средней школы. – М: Государственное учебно- педагогическое издательство министерствапросвещение РСФСР,1959. - 392 с.