Приложения степенных рядов

Козорезов Дмитрий Романович
студент ФГОУ ВО
Курский государственный университет,
колледж коммерции, технологий и сервиса,
Россия, г. Курск

Ефимцева Ирина Борисовна,
Научный руководитель, канд. тех. наук.
преподаватель ФГОУ ВО
Курский государственный университет,
колледж коммерции, технологий и сервиса,
Россия, г. Курск

Ряды широко используются в приближённых вычислениях. С помощью рядов с заданной точностью можно вычислить значения корней, тригонометрических функций, логарифмов чисел, определённых интегралов. Ряды применяются также при интегрировании дифференциальных уравнений.

Интегрирование многих дифференциальных уравнений не приводится к квадратурам, а их решения не выражаются в элементарных функциях. Решения некоторых из этих уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов, сходящихся в определённых интервалах. Ряд, являющийся решением дифференциального уравнения, можно найти или способом неопределённых коэффициентов, или способом, основанным на применении ряда Тейлора (Маклорена). Способ неопределённых коэффициентов особенно удобен в применении к линейным уравнениям.

Степенные ряды находят применение в таких задачах, как приближенное вычисление функций с заданной степенью точности, определенных интегралов, решение дифференциальных уравнений и др.

Приближенное значение функции вычисляют, заменяя ряд Маклорена этой функции конечным числом его членов.

Пусть известно значение функции $f(x)$ в точке x_0 и всех её производных. Тогда на основании теорем о разложении $f(x)$ в степенной ряд, она может быть определена и для других точек интервала, содержащего точку $x = x_0$. Как оценить точность разложения? Сколько членов ряда необходимо взять, чтобы получить необходимую точность разложения?

Ошибку приближения можно оценить с помощью теоремы о достаточном условии сходимости степенного ряда к функции f(x), опираясь на оценку остаточного члена ряда:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(x\theta)^{n+1}}{(n+1)!}\right| < M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $x \in (-R, R)$; $0 < \theta < 1$, или непосредственно оценивая остаток ряда, что очень просто выполнить для знакочередующегося ряда при помощи признака Лейбница. На практике предпочтение отдается оценке ряда, т.к. для оценки $R_n(x)$ необходимо знание производных нужного порядка.

Пример 1. Вычислить $\cos 1^0$ точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Так как

$\cos 1^0 = \cos\frac{\pi}{180}$, положим $x = \frac{\pi}{180}$, тогда

$\cos\frac{\pi}{180} \approx 1-\frac{\pi^2}{180\cdot 2} \approx 0{,}9998$. Здесь достаточно двух членов разложения,

т.к. $|R_2(x)| < \frac{\pi^4}{180^2\cdot 4} < \frac{1}{1000}$.

Если функция f(x) разложима в степенной ряд на отрезке

$x \in (-R, R)$, а пределы интеграла лежат внутри интервала сходимости ряда, то интеграл можно представить в виде ряда, то есть

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{где} \quad -R \le a < b \le R.$$

В результате интегрирования получим степенной ряд для функции F(x), имеющей тот же радиус сходимости, что и ряд подынтегральной функции.

3. Интегрирование дифференциальных уравнений

А. Метод неопределённых коэффициентов

Пусть задано дифференциальное уравнение и начальные условия, определяющие частное решение. Допустим, что решение уравнения в окрестности точки $x = x_o$, в которой удовлетворяются начальные условия, можно разложить в степенной ряд

$$y = a_o + a_1 \cdot (x - x_o) + a_2 \cdot (x - x_o)^2 + \ldots .$$

Продифференцируем этот ряд с неопределёнными коэффициентами столько раз, каков порядок уравнения. Подставляя затем в уравнение вместо неизвестной функции и её производных соответствующие ряды, получаем тождество, из которого и определим неизвестные коэффициенты ряда.

Б. Метод последовательных дифференцирований

Решение ищется в виде ряда Тейлора для искомой функции в точке $x = x_0$, в которой должны быть заданы начальные условия (задача Коши).

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \ldots$$

Сначала находятся несколько из первых неизвестных коэффициентов $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, … из начальных условий. Затем, остальные коэффициенты находятся путём дифференцирования обеих частей данного уравнения и подстановкой уже найденных значений этих коэффициентов.

Список литературы

1. Высшая математика: Общий курс: Учебник – 2-е изд., перераб. / А.И. Яблонский, А.В. Кузнецов, Е.И. Шилкина и др.; Под общ. ред. С.А. Самаля. – Мн.: Выш. шк., 2000.– 351 с.

2. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. Ч. 2. Основы математического анализа и элементы дифференциальных уравнений. – Мн.: Амалфея, 2003. – 352 с.