Статистические оценки параметров распределения

Рудько Александр Владимирович
студент ФГОУ ВО
Курский государственный университет,
колледж коммерции, технологий и сервиса,
Россия, г. Курск

Ефимцева Ирина Борисовна,
Научный руководитель, канд. тех. наук.
преподаватель ФГОУ ВО
Курский государственный университет,
колледж коммерции, технологий и сервиса,
Россия, г. Курск

Генеральные совокупности характеризуются некоторыми постоянными числовыми характеристиками распределения. По выборкам можно найти оценки этих характеристик. Вследствие случайности выборок значения оценок одной числовой характеристики, вычисленные по разным выборкам из одной и той же генеральной совокупности, бывают, как правило, различными.

Статистической оценкой Θ* неизвестного параметра Θ теоретического распределения называют функцию f $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ от наблюдаемых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_N$.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\Theta^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ – результаты N наблюдений над количественным признаком X (вы- борка). Например, если нужно оценить среднее значение $\Theta = \mu$ нормального распределения, то можно использовать следующие оценки Θ*:

1) $\dfrac{x_{min} + x_{max}}{2}$ – среднее арифметическое максимального и минимального элементов выборки;

2) Mo – моду;

3) Me – медиану;

4) $\overline{X}$ – среднее арифметическое (выборочное среднее).

Для того, чтобы установить, какая из оценок лучше, надо знать основные свойства (виды) оценок. Основными свойствами оценок являются свойства несмещённости, эффективности и состоятельности.

Несмещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки, т.е $M[\Theta^*] = \Theta$.

Смещённой называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Эффективной называется несмещённая оценка, которая имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещённых оценок того же параметра, вычисленных по выборкам одного и того же объёма.

Оценка Θ^* параметра Θ называется состоятельной, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{P\left(\left|\Theta^*-\Theta\right|<\varepsilon\right)\right\}=1.$$

Несмещённой оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя (выборочное математическое ожидание) $\overline{X}$.

Смещённой оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия S^2.

Несмещённой оценкой генеральной дисперсии служит уточнённая дисперсия S^{*2}.

Смещённой оценкой среднеквадратического отклонения генеральной совокупности служит выборочное среднеквадратическое отклонение S.

Несмещённой оценкой среднеквадратического отклонения генеральной совокупности служит уточнённое среднеквадратическое отклонение S^*.

Между смещёнными и несмещёнными дисперсией и среднеквадратическим отклонением существует простая связь

$S^{*2} = \frac{N}{N-1} \cdot S^2$; $S^* = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \cdot S$, где N – объём выборки.

Все точечные оценки параметров распределения генеральной совокупности вычисляют по выборкам, но из-за случайности выборок оценки являются случайными величинами, отличающимися от постоянного истинного значения параметра Θ. Обозначим точность оценки через Δ (Δ > 0), тогда $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \Delta$. Чем меньше Δ, тем точнее оценка. Любую точность можно получить с определённой вероятностью (надёжностью) P = p($\left|\Theta - \Theta^*\right| < \Delta$). Эта вероятность P называется доверительной вероятностью. Можно говорить, что с вероятностью P параметр Θ находится в интервале

$$\Theta^* - \Delta < \Theta < \Theta^* + \Delta,$$

который называется доверительным интервалом для параметра Θ. Доверительная вероятность P, точность оценки Δ и объём выборки N связаны между собой. Если определены две величины, то тем самым будет определена и третья. Точность оценки Δ фактически определяет длину доверительного интервала 2·Δ. Доверительная вероятность P задаётся обычно значением, близким к единице, например, 0.95; 0.98; 0.99 и т.д. Запишем правила построения доверительных интервалов для некоторых из наиболее часто встречающихся оценок параметров.

Доверительный интервал для среднего значения a нормального распределения:

a) при известном среднеквадратическом отклонении σ генеральной совокупности имеет вид:

$$\bar{x} - t(\quad) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < a < \bar{x} + t(\quad) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

где N – объём выборки; Φ(t) = P /2, t (P) – находят по таблице (см. приложение 1) интегральной функции Лапласа Φ(t) по заданной доверительной вероятности P ;

b) при неизвестном σ имеет вид

$$\bar{x} - t(\quad, N-1)\cdot\frac{S^*}{\sqrt{N}} < a < \bar{x} + t(\quad, N-1)\cdot\frac{S^*}{\sqrt{N}}$$

где S^* – «исправленное» выборочное среднеквадратическое отклонение; $t(P, N-1)$ находится по заданным N и P по справочной таблице.

Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения σ нормального распределения имеет вид

$$S^*\cdot(1 - q) < \sigma < S^*\cdot(1 + q) \quad (\text{при } q < 1);$$

$$0 < \sigma < S^*\cdot(1 + q) \quad (\text{при } q > 1),$$

где q находят по справочной таблице в учебных пособиях по заданным N и P . Статистической гипотезой называется любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин, либо о параметрах распределения. Например, случайная величина X имеет показательное распределение, случайная величина с нормальным распределением и дисперсией $D[X] = 2.2$ имеет $M[X] = 4$, и т.д. Статистические гипотезы проверяются статистическими методами.

Проверяемую гипотезу обычно обозначают H_0 и называют основной или нулевой. Обычно вырабатывают ещё и альтернативную гипотезу H_1, отрицающую или исключающую основную гипотезу H_0. Таким образом, в результате проверки можно принимать только одну из гипотез H_0 или H_1, отвергая в это же время другую.

Например, если основная гипотеза H_0 о значении неизвестного параметра θ распределения выглядит так:

H_0: $\theta = \theta_0$. Альтернативная гипотеза H_1 может при этом иметь следующий вид:

$$H_1: \theta < \theta_0;\ H_1: \theta > \theta_0 \text{ или } H_1: \theta \neq \theta_0.$$

Различают гипотезы, которые содержат одно и более одного предположений. Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Сложной называют гипотезу, которая составлена из двух и более простых гипотез.

Гипотезу проверяют на основании выборки, полученной из генеральной совокупности. Из-за случайности выборки в результате проверки могут возникать ошибки и приниматься неправильные решения. В принципе возможны ошибки первого и второго рода. Ошибка первого рода имеет место тогда, когда отвергается правильная гипотеза H_0. При ошибке второго рода принимается неправильная гипотеза H_0.

Решение признать верной гипотезу H_0 или гипотезу H_1 принимается по значению некоторой функции выборки, называемой статистическим критерием. То значение критерия, которое вычислено по выборке, называют наблюдаемым или эмпирическим и обозначают $К_{набл}$. Множество значений критерия можно разделить на два непересекающихся подмножества:

- подмножество значений критерия, при которых гипотеза H_0 принимается (не отклоняется), называют областью принятия гипотезы или допустимой областью;
- подмножество значений критерия, при которых гипотеза H_0 отвергается (отклоняется) и принимается гипотеза H_1, называют критической областью.

Критическими точками (границами) называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Эти точки ещё называют табличными или критическими значениями критерия и обозначают $К_{табл}$ или $К_{крит}$.

При проверке гипотез следует, по возможности, уменьшать вероятности принятия неправильных решений. Допустимая вероятность ошибки первого рода обозначается через α и называется уровнем значимости. Вероятность противоположного события называется доверительной вероятностью и обозначается Р . Доверительная вероятность и уровень значимости связаны соотношением

$$Р = 1 – α.$$

Значение α обычно мало. Однако при выборе α следует иметь в виду, что уменьшение ошибки первого рода может вызывать увеличение ошибки второго рода. На практике значения для α чаще всего берут равными 0.1, 0.05, 0.02, 0.01. Доверительную вероятность P берут, соответственно, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99. Уровень значимости выбирается в зависимости от важности и степени ответственности решаемой задачи. Если нас не пугают последствия ошибочных выводов, можно брать уровень значимости меньше.

Граничные точки критических областей, т.е. табличные значения критерия, определяют по таблицам, составленным для данного критерия. При этом учитывается тип распределения, доверительная вероятность и вид основной и альтернативной гипотез.

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Иначе говоря, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Проверка статистической гипотезы состоит из следующих этапов:

1) определение основной гипотезы H_0;
2) определение альтернативной гипотезы H_1;
3) выбор критерия;
4) задание уровня значимости или доверительной вероятности;
5) определение по таблицам критической области и $K_{табл}$;
6) нахождение числовых характеристик выборки;
7) вычисление по выборке значения критерия $K_{набл}$;
8) сравнение значений $K_{набл}$ с $K_{табл}$;
9) принятие решения: если значение $K_{набл}$ не входит в критическую область, то принимается гипотеза H_0 и отвергается гипотеза H_1, а если входит в критическую область, то отвергается гипотеза H_0 и принимается гипотеза H_1.

Иногда целесообразно перед определением альтернативной гипотезы H_1 выполнить этап 6), где для получения критерия $K_{набл}$ требуется вычислить несмещённые оценки параметров генеральной совокупности. Например, если проверяется гипотеза H_0: M[X] $\neq$ 5 и несмещённая оценка среднего значения $\overline{X}$ = 7.4, то имеют смысл только следующие альтернативные гипотезы H_1: M[X] > 5 или H_1: M[X] = 5.

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
00	0.000	0.37	0.144	0.74	0.270	1.48	0.431	2.22	0.487
0.01	0.004	0.38	0.148	0.76	0.276	1.50	0.433	2.24	0.488
0.02	0.008	0.39	0.152	0.78	0.282	1.52	0.436	2.26	0.488
0.03	0.012	0.40	0.155	0.80	0.288	1.54	0.438	2.28	0.489
0.04	0.016	0.41	0.159	0.82	0.294	1.56	0.441	2.30	0.489
0.05	0.020	0.42	0.163	0.84	0.300	1.58	0.443	2.32	0.490
0.06	0.024	0.43	0.166	0.86	0.305	1.60	0.445	2.34	0.490
0.07	0.028	0.44	0.170	0.88	0.311	1.62	0.447	2.36	0.491
0.08	0.032	0.45	0.174	0.90	0.316	1.64	0.450	2.38	0.491
0.09	0.036	0.46	0.177	0.92	0.321	1.66	0.452	2.40	0.492
0.10	0.040	0.47	0.181	0.94	0.326	1.68	0.454	2.42	0.492
0.11	0.044	0.48	0.184	0.96	0.332	1.70	0.455	2.44	0.493
0.12	0.048	0.49	0.188	0.98	0.337	1.72	0.457	2.46	0.493
0.13	0.052	0.50	0.192	1.00	0.341	1.74	0.459	2.48	0.493
0.14	0.056	0.51	0.195	1.02	0.346	1.76	0.461	2.50	0.494
0.15	0.060	0.52	0.199	1.04	0.351	1.78	0.463	2.54	0.495
0.16	0.064	0.53	0.202	1.06	0.355	1.80	0.464	2.58	0.495
0.17	0.068	0.54	0.205	1.08	0.359	1.82	0.466	2.62	0.496
0.18	0.071	0.55	0.209	1.10	0.364	1.84	0.467	2.66	0.496
0.19	0.075	0.56	0.212	1.12	0.369	1.86	0.469	2.70	0.497
0.20	0.079	0.57	0.216	1.14	0.373	1.88	0.470	2.74	0.497
0.21	0.083	0.58	0.219	1.16	0.377	1.90	0.471	2.78	0.497
0.22	0.087	0.59	0.222	1.18	0.381	1.92	0.473	2.82	0.498
0.23	0.091	0.60	0.226	1.20	0.385	1.94	0.474	2.86	0.498
0.24	0.095	0.61	0.229	1.22	0.388	1.96	0.475	2.90	0.498
0.25	0.099	0.62	0.232	1.24	0.393	1.98	0.476	2.94	0.498
0.26	0.103	0.63	0.236	1.26	0.396	2.00	0.477	2.98	0.499
0.27	0.106	0.64	0.239	1.28	0.400	2.02	0.478	3.00	0.499
0.28	0.110	0.65	0.242	1.30	0.403	2.04	0.479	3.20	0.4993
0.29	0.114	0.66	0.245	1.32	0.407	2.06	0.480	3.40	0.4997
0.30	0.118	0.67	0.249	1.34	0.410	2.08	0.481	3.60	0.4998
0.31	0.122	0.68	0.252	1.36	0.413	2.10	0.482	3.80	0.4999

В среде MATHCAD Φ(x) вычисляется как cnorm(x) - 0.5.

Список литературы

1. Кочетков Е. С., Смерчинская С. О., Соколов В. В. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2005.
2. Калинина В. Н., Панкин В. Ф. Математическая статистика. – М.: Астрель: АСТ, 2005.
3. Никольский С. М. Элементы математического анализа. – М.:Дрофа, 2002.
4. Щипачев В. С. Задачник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2005.
5. Исаков В. Н. Элементы численных методов. – М.: Академия, 2003.