Система массового обслуживания с неограниченной очередью

Ефимцев Илья Владимирович,
студент ФГОУ ВО
Юго-западный государственный университет,
Россия, г. Курск

В коммерческой деятельности в качестве одноканальной СМО с неограниченным ожиданием является, например, коммерческий директор, поскольку он, как правило, вынужден выполнять обслуживание заявок различной природы: документы, переговоры по телефону, встречи и беседы с подчиненными, представителями налоговой инспекции, полиции, товароведами, маркетологами, поставщиками продукции и решать задачи в товарно-финансовой сфере с высокой степенью финансовой ответственности, что связано с обязательным выполнением запросов, которые ожидают иногда нетерпеливо выполнения своих требований, а ошибки неправильного обслуживания, как правило, экономически весьма ощутимы. Одноканальная СМО с неограниченной очередью представляет собой систему, в которой товары, завезенные для продажи (обслуживания), находясь на складе, образуют очередь на обслуживание (продажу). Длину очереди составляет количество товаров, предназначенных для продажи. В этой ситуации продавцы выступают в роли каналов, обслуживающих товары.. В этом случае клиенты формируют одну очередь к единственному пункту обслуживания. Пусть λ – число заявок в единицу времени; μ – число клиентов, обслуживаемых в единицу времени; п – число заявок в системе. Возможные состояния СМО S0 (канал свободен), S1 (канал занят, очереди нет), S2 (канал занят, в очереди одна заявка), S3 (канал занят, в очереди две заявки) и т.д.

На вход n-канальной СМО с бесконечной очередью поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ.

Интенсивность простейшего потока обслуживания каждого канала μ.

Если заявка застаёт все каналы свободными, то она принимается на обслуживание и обслуживается одним из n каналов.

После окончания обслуживания один канал освобождается.

Если вновь прибывшая заявка застаёт в системе свободным хотя бы один канал, то она принимается на обслуживание одним из свободных каналов и обслуживается до конца.

Если заявка застаёт все каналы занятыми, то она становится в очередь и «терпеливо» ждёт своего обслуживания.

Дисциплина очереди естественная: кто раньше пришёл, тот раньше и обслуживается.

Число мест в очереди не ограничено.

Состояние рассмотренной системы будем связывать с числом заявок, находящихся в системе.

Рассмотрим множество состояний системы:

S0 — в системе нет ни одной заявки, все каналы свободны;

S1 — в системе имеется одна заявка, она обслуживается одним каналом;

S2 — в системе имеется две заявки, они обслуживаются двумя каналами;

Sk — в системе имеется k-заявок, они обслуживаются k-каналами;

Sn — в системе имеется n-заявок, они обслуживаются n-каналами, очереди нет;

Sn+1 — в системе имеется (n+1)-заявок, n из них обслуживаются n-каналами, а одна заявка ожидает в очереди;

Sn+r — в системе имеется (n+r)-заявок, n из них обслуживаются n-каналами, а r-заявок ожидают в очереди;

Sn+r+1 — в системе имеется (n+r+1)-заявок, n из них обслуживаются n-каналами, а (r+1)-заявок ожидают в очереди.

Пусть в n-канальную систему массового обслуживания (СМО) поступает с интенсивностью простейший поток требований. Длительность обслуживания распределена по показательному закону со средним временем обслуживания . Если же все каналы обслуживания заняты, то вновь поступившее требование становится в очередь за ранее поступившими не обслуженными требованиями. Освободившийся канал приступает к обслуживанию очередного требования из очереди. Определим основные характеристики работы такой системы. Так как число требований, стоящих в очереди, может быть бесконечно большим, то и число состояний системы также может быть бесконечно большим.

Вероятность свободного состояния системы:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)} \right)^{-1}$$

Последнее выражение получено при условии, которое является условием стационарности СМО. В случаеm система не справляется с обслуживанием, очередь неограниченно возрастает. Отношение обозначается через и называется уровнем загрузки системы:

$$\chi = \frac{\rho}{n} < 1$$

Определим основные характеристики многоканальной СМО с ожиданием. Вероятность получения отказа равна нулю. Относительная пропускная способность —это величина, которая дополняет вероятность отказа до единицы: Абсолютная пропускная способность. Определим среднее число занятых каналов: каждый занятый канал обслуживает в единицу времени в среднем заявок, а вся система — заявок. Тогда: $\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \rho$

Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$K_з = \frac{\bar{z}}{n} = \frac{\rho}{n} = \chi$$

Образование очереди возможно, когда вновь пост пившее требование застанет в системе не менее n требований, т. е. когда в системе будет находить , требований. Эти события независимы, поэтому вероятность того, что все каналы заняты, равна сумме вероятностей.

Отсюда вероятность образования очереди:

$$\pi = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\rho^n}{(n-1)!\,(n-\rho)} \cdot P_0 \qquad \left(\chi = \frac{\rho}{n} < 1\right)$$

Среднее число заявок в очереди можно вычислить как математическое ожидание, складывая произведения возможного числа заявок на вероятность того, что число заявок будет в очереди: $\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!\,(n-\rho)^2} P_0$

Среднее число заявок, связанных с системой:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^n}{\mu(n-1) \cdot (n-\rho)^2}$$

Список литературы

1. Баврин, И. И. Высшая математика: учебник по естественно–научным направлениям и специальностям / И. И. Баврин. – Москва: Академия, 2017. – 611 с.
2. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва: АСТ: Астрель, 2018. – 703 с.
3. Высшая математика / А. И. Астровский, Е. В. Воронкова, О. П. Степанович: учебно-методический комплекс. – Минск: Издательство МИУ, 2018. – 383 с.