Проверка статистических гипотез

Гнедова Анжелика Евгеньевна
студентка ФГОУ ВО
Курский государственный университет,
колледж коммерции, технологий и сервиса,
Россия, г. Курск

Ефимцева Ирина Борисовна,
Научный руководитель, канд. тех. наук.
преподаватель ФГОУ ВО
Курский государственный университет,
колледж коммерции, технологий и сервиса,
Россия, г. Курск

Статистической гипотезой называется любое утверждение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин, либо о параметрах распределения. Например, случайная величина X имеет показательное распределение, случайная величина с нормальным распределением и дисперсией D[X] = 2.2 имеет M[X] = 4, и т.д. Статистические гипотезы проверяются статистическими методами.

Проверяемую гипотезу обычно обозначают H_0 и называют основной или нулевой. Обычно вырабатывают ещё и альтернативную гипотезу H_1, отрицающую или исключающую основную гипотезу H_0. Таким образом, в результате проверки можно принимать только одну из гипотез H_0 или H_1, отвергая в это же время другую.

Например, если основная гипотеза H_0 о значении неизвестного параметра θ распределения выглядит так:

$$H_0: \theta = \theta_0.$$

Альтернативная гипотеза H_1 может при этом иметь следующий вид:

$$H_1: \theta < \theta_0; H_1: \theta > \theta_0 \text{ или } H_1: \theta \neq \theta_0.$$

Различают гипотезы, которые содержат одно и более одного предположений. Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Сложной называют гипотезу, которая составлена из двух и более простых гипотез.

Гипотезу проверяют на основании выборки, полученной из генеральной совокупности. Из-за случайности выборки в результате проверки могут возникать ошибки и приниматься неправильные решения. В принципе возможны ошибки первого и второго рода. Ошибка первого рода имеет место тогда, когда отвергается правильная гипотеза H_0. При ошибке второго рода принимается неправильная гипотеза H_0.

Решение признать верной гипотезу H_0 или гипотезу H_1 принимается по значению некоторой функции выборки, называемой статистическим критерием. То значение критерия, которое вычислено по выборке, называют наблюдаемым или эмпирическим и обозначают $К_{набл}$. Множество значений критерия можно разделить на два непересекающихся подмножества:

- подмножество значений критерия, при которых гипотеза H_0 принимается (не отклоняется), называют областью принятия гипотезы или допустимой областью;
- подмножество значений критерия, при которых гипотеза H_0 отвергается (отклоняется) и принимается гипотеза H_1, называют критической областью.

Критическими точками (границами) называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы. Эти точки ещё называют табличными или критическими значениями критерия и обозначают $К_{табл}$ или $К_{крит}$.

При проверке гипотез следует, по возможности, уменьшать вероятности принятия неправильных решений. Допустимая вероятность ошибки первого рода обозначается через α и называется уровнем значимости. Вероятность противоположного события называется доверительной вероятностью и обозначается Р . Доверительная вероятность и уровень значимости связаны соотношением

$$P = 1 - \alpha.$$

Значение α обычно мало. Однако при выборе α следует иметь в виду, что уменьшение ошибки первого рода может вызывать увеличение ошибки второго рода. На практике значения для α чаще всего берут равными 0.1, 0.05, 0.02, 0.01. Доверительную вероятность P берут, соответственно, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99. Уровень значимости выбирается в зависимости от важности и степени ответственности решаемой задачи. Если нас не пугают последствия ошибочных выводов, можно брать уровень значимости меньше.

Граничные точки критических областей, т.е. табличные значения критерия, определяют по таблицам, составленным для данного критерия. При этом учитывается тип распределения, доверительная вероятность и вид основной и альтернативной гипотез.

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Иначе говоря, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

Проверка статистической гипотезы состоит из следующих этапов:

1) определение основной гипотезы H_0;
2) определение альтернативной гипотезы H_1;
3) выбор критерия;
4) задание уровня значимости или доверительной вероятности;
5) определение по таблицам критической области и $K_{табл}$;
6) нахождение числовых характеристик выборки;
7) вычисление по выборке значения критерия $K_{набл}$;
8) сравнение значений $K_{набл}$ с $K_{табл}$;
9) принятие решения: если значение $K_{набл}$ не входит в критическую область, то принимается гипотеза H_0 и отвергается гипотеза H_1, а если входит в критическую область, то отвергается гипотеза H_0 и принимается гипотеза H_1.

Иногда целесообразно перед определением альтернативной гипотезы H_1 выполнить этап 6), где для получения критерия $K_{набл}$ требуется вычислить несмещённые оценки параметров генеральной совокупности. Например, если проверяется гипотеза H_0: M[X] ≠ 5 и несмещённая оценка среднего значения $\overline{X}$ = 7.4, то имеют смысл только следующие альтернативные гипотезы H_1: M[X] > 5 или H_1: M[X] = 5.

По независимым выборкам, объёмы которых N_1, N_2, извлечённых из нормальных генеральных совокупностей, найдены уточнённые выборочные дисперсии S^{*2}_x и S^{*2}_y. Требуется сравнить эти дисперсии.

Для того, чтобы при заданной доверительной вероятности P проверить нулевую гипотезу H_0: D[X] = D[Y] о равенстве генеральных дисперсий, надо вычислить наблюдаемое значение критерия (отношение большей уточнённой дисперсии к меньшей)

$$F_{набл} = \frac{S*^2_x}{S*^2_y}$$

и по таблице (см. приложение 6) критических точек распределения Фишера-Снедекора, по заданной доверительной вероятности P и числам степеней свободы $k_1 = N_1 - 1$, $k_2 = N_2 - 1$ (k_1 – число степеней свободы большей уточнённой дисперсии) найти критическую точку

$F_{табл} = F_{табл}(P;\ k_1,\ k_2)$

при конкурирующей гипотезе H_1: D[X] > D[Y] и

$F_{табл} = F_{табл}((P + 1)/2;\ k_1,\ k_2)$

при конкурирующей гипотезе H_1: D[X] ≠ D[Y].

Если $F_{набл} < F_{табл}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $F_{набл} > F_{табл}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Пусть генеральная совокупность имеет какое-то неизвестное распределение и для неё получена выборка и построена гистограмма. По форме гистограммы или из каких-то других априорных соображений выдвинута гипотеза H_0 о законе распределения. Это распределение называется теоретическим. По выборке находятся параметры теоретического распределения. Обозначим L – число этих параметров для данного распределения. Если, например, речь идёт о нормальном распределении, то его параметры (математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение) берутся равными соответствующим несмещённым выборочным характеристикам $\overline{X}$ и S*. Тогда теоретическое распределение будет целиком определено.

При использовании критерия χ^2 - Пирсона вся область изменения генеральной совокупности X делится на r интервалов, которые могут иметь различную длину. По выборке составляют вариационный ряд по этим же интервалам. Если в некотором интервале частота n_i слишком мала (< 5), то этот интервал объединяют с соседним интервалом. По теоретическому распределению вычислим вероятности p_i того, что случайная величина X принимает значение из i - го интервала, при этом $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Затем найдём теоретические частоты $m_i = n \cdot p_i$.

Правило. Для того чтобы при заданной доверительной вероятности P проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности, надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$$

и по таблице (см. приложение 4) критических точек распределения χ^2, по заданной доверительной вероятности P и числу степеней свободы

$f = r – L – 1$ найти критическую точку $\chi^2_{\text{крит}}(P\,;\,f)$.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}$ – гипотеза H_0 принимается.

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{крит}}$ – гипотеза H_0 отвергается.

Если выборочный коэффициент корреляции получился близким к нулю, то возможно, что генеральный коэффициент корреляции равен нулю, а отклонения от нуля произошли за счёт случайности наблюдений. Выдвинем нулевую гипотезу H_0: выборочный коэффициент корреляции r_{xy} незначимо отличается от нуля или генеральный коэффициент корреляции равен нулю. Для проверки данной гипотезы надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{набл} = \left| r_{xy} \right| \cdot \sqrt{\frac{N-2}{1-r_{xy}^2}},$$

где N – объём выборки.

Для выбранной доверительной вероятности P и k = N –2 находят в таблице (см. приложение 5) соответствующий квантиль распределения Стьюдента или критическое значение $T_{табл} = t$ (P ; k).

Теперь, если $T_{набл} < T_{табл}$, то гипотеза H_0 принимается, иначе H_0 отвергается (т.е. считается, что с вероятностью вывода P величины

X и Y некоррелированы.)

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-z^2/2}dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.00	0.000	0.37	0.144	0.74	0.270	1.48	0.431	2.22	0.487
0.01	0.004	0.38	0.148	0.76	0.276	1.50	0.433	2.24	0.488
0.02	0.008	0.39	0.152	0.78	0.282	1.52	0.436	2.26	0.488
0.03	0.012	0.40	0.155	0.80	0.288	1.54	0.438	2.28	0.489
0.04	0.016	0.41	0.159	0.82	0.294	1.56	0.441	2.30	0.489
0.05	0.020	0.42	0.163	0.84	0.300	1.58	0.443	2.32	0.490
0.06	0.024	0.43	0.166	0.86	0.305	1.60	0.445	2.34	0.490
0.07	0.028	0.44	0.170	0.88	0.311	1.62	0.447	2.36	0.491
0.08	0.032	0.45	0.174	0.90	0.316	1.64	0.450	2.38	0.491
0.09	0.036	0.46	0.177	0.92	0.321	1.66	0.452	2.40	0.492
0.10	0.040	0.47	0.181	0.94	0.326	1.68	0.454	2.42	0.492
0.11	0.044	0.48	0.184	0.96	0.332	1.70	0.455	2.44	0.493
0.12	0.048	0.49	0.188	0.98	0.337	1.72	0.457	2.46	0.493
0.13	0.052	0.50	0.192	1.00	0.341	1.74	0.459	2.48	0.493
0.14	0.056	0.51	0.195	1.02	0.346	1.76	0.461	2.50	0.494
0.15	0.060	0.52	0.199	1.04	0.351	1.78	0.463	2.54	0.495
0.16	0.064	0.53	0.202	1.06	0.355	1.80	0.464	2.58	0.495
0.17	0.068	0.54	0.205	1.08	0.359	1.82	0.466	2.62	0.496
0.18	0.071	0.55	0.209	1.10	0.364	1.84	0.467	2.66	0.496
0.19	0.075	0.56	0.212	1.12	0.369	1.86	0.469	2.70	0.497
0.20	0.079	0.57	0.216	1.14	0.373	1.88	0.470	2.74	0.497
0.21	0.083	0.58	0.219	1.16	0.377	1.90	0.471	2.78	0.497
0.22	0.087	0.59	0.222	1.18	0.381	1.92	0.473	2.82	0.498
0.23	0.091	0.60	0.226	1.20	0.385	1.94	0.474	2.86	0.498
0.24	0.095	0.61	0.229	1.22	0.388	1.96	0.475	2.90	0.498
0.25	0.099	0.62	0.232	1.24	0.393	1.98	0.476	2.94	0.498
0.26	0.103	0.63	0.236	1.26	0.396	2.00	0.477	2.98	0.499
0.27	0.106	0.64	0.239	1.28	0.400	2.02	0.478	3.00	0.499
0.28	0.110	0.65	0.242	1.30	0.403	2.04	0.479	3.20	0.4993
0.29	0.114	0.66	0.245	1.32	0.407	2.06	0.480	3.40	0.4997
0.30	0.118	0.67	0.249	1.34	0.410	2.08	0.481	3.60	0.4998
0.31	0.122	0.68	0.252	1.36	0.413	2.10	0.482	3.80	0.4999
0.32	0.126	0.69	0.255	1.38	0.416	2.12	0.483	4.00	0.500
0.33	0.129	0.70	0.258	1.40	0.419	2.14	0.484	4.50	0.500
0.34	0.133	0.71	0.261	1.42	0.422	2.16	0.485	5.00	0.500
0.35	0.137	0.72	0.264	1.44	0.425	2.18	0.485	6.00	0.500
0.36	0.141	0.73	0.267	1.46	0.428	2.20	0.486	∞	0.500

В среде MATHCAD Φ(x) вычисляется как cnorm(x) - 0.5.

В среде MATHCAD значения критерия Фишера вычисляются с помощью функции qF(P, k1, k2).

Список литературы

1. Волков И. К., Загоруйко Е. А. Исследование операций в экономике: Учебник.- М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002
2. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, «ДИС»,1997
3. Исследование операций в экономике: Учебное пособие /Под ред. Проф. Н. Ш. Кремера. – Банки и биржи, ЮНИТИ,1997
4. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: ПИТЕР, 2000

Интернет-ресурсы:

1. Электронное учебное пособие «Исследование операций»: http://fmi.asf.ru/vavilov/index.htm -
2. Электронная библиотека прикладной и чистой математики http://allmath.ru