Использование программного продукта mathcad при отыскании непрерывной случайной величины

Борзенкова Татьяна Юрьевна
студентка ФГОУ ВО
Курский государственный университет,
колледж коммерции, технологий и сервиса,
Россия, г. Курск

Ефимцева Ирина Борисовна,
Научный руководитель, канд. тех. наук.
преподаватель ФГОУ ВО
Курский государственный университет,
колледж коммерции, технологий и сервиса,
Россия, г. Курск

Основной задачей математической статистики является исследование некоторой совокупности объектов или некоторой случайной величины (нескольких случайных величин). Для исследования случайной величины при постоянных условиях выполняются испытания. Целью статистических наблюдений (испытаний) является выяснение вероятностных свойств совокупности: распределения, числовых характеристик и т.д. и дальнейшее их применение в планировании.

Случайной величиной называется величина, значение которой определяется случайным образом из опыта. При обработке различных опытных данных при вычислении случайной величины мы обременены огромным количеством расчетов.

Их выполнение возможно оптимизировать при использовании программного продукта MATHCAD**.**

ЗАДАЧА 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1,\\ \dfrac{1}{3}(x+1) & при -1<x\le 2,\\ 1 & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина *X* примет значения:

1) не меньше 1.2;

2) заключенное в интервале (-0.5;1.3).

Решение: 1. Загрузим пакет MATHCAD и начнем составлять программу с левого верхнего угла рабочего поля.

x:=1.2 $\qquad F(x):=\left|\begin{array}{lll}0 & if & x\le -1\\ \dfrac{1}{3}(x+1) & if & -1<x\le 2\\ 1 & if & x>2\ .\end{array}\right.$

Искомая вероятность находится по формуле

$$P(X\ge x)=1-P(X<x)=1-F(x).$$

Поэтому получим на MATHCAD

1. *F(x):* = 0.267.

2. Найдем $P(x1<X<x2)=F(x2)-F(x1),$ где x1=-0, 5, x2=1,3.

Таким образом, получим

p=F(1.3) – F(-0.5)=0.6.

ЗАДАЧА 2. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что в результате *x* независимых испытаний величина *X* ровно 4 раза примет значение, принадлежащее интервалу (-0.5; 1.3)

Решение: Искомая вероятность $P_4(4)=C_7^4 p^4\cdot q^3,$ где

$$C_7^4=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};$$

Р – вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (-0,5;1,3); в нашем случае р=0,6;

q=1-р – вероятность противоположного события.

Таким образом, находим на MATHCAD

$$\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot (0.6)^{4}\cdot (1-0.6)^{3}=0.29.$$

ЗАДАЧА 3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 2, \\ c\cdot (x-4)^{2} & при \quad 2<x\le 6, \\ 0 & при \quad x>6. \end{cases}$$

Найти:

1) параметр c;

2) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее (2;4.5);

3) математическое ожидание MX и дисперсию DX;

4) математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$\varphi(x)=5x+4$;

5) функцию распределения $F(x)$;

6) построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Решение: 1.Плотность распределения $f(x)\geq 0$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

Поэтому на MATHCAD получаем

a:=2 b:=6 c:=0.188.

$$f1(x) := (x-4)^2 \qquad\qquad c := \frac{1}{\int_a^b f1(x)dx}.$$

Таким образом, плотность $f(x) = C \cdot f1(x)$ для $x \in (2,6)$.

2. Найдем вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, принадлежащее интервалу *(x1,x2)*. С помощью ЭВМ получим

x1:=2 *x2:=4.5*

$$P := \int_{x1}^{x2} f(x)dx \qquad\qquad P := 0.508.$$

3. Математическое ожидание непрерывных случайных величин *X* и $\varphi(x)$ находим соответственно по формулам:

$$MX = \int_a^b x \cdot f(x)dx, \qquad M\varphi(x) = \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x)dx,$$

где *f(x)* – плотность, $x \in (a,b)$.

В нашем случае на ЭВМ находим

a:=2 *b:=6* $f(x):=c \cdot (x-4)^2$ $\varphi(x):=4x+5$.

$$MX := \int_a^b x \cdot f(x)dx \qquad\qquad MX := 4.$$

$$M\varphi := \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x)dx \qquad\qquad M\varphi = 21.$$

4. Найдем дисперсию величин X и $\varphi(x)$ соответственно по формулам для $x \in (a,b)$

$$DX = \int_a^b x^2 f(x)dx - (MX)^2 \quad .$$

$$D\varphi(x) = \int_a^b \varphi^2(x) \cdot f(x)dx - (MX(x))^2 .$$

Поэтому на MATHCAD получим для нашей задачи

a: =2 *b: =6* *f(x): =c · f1(x)* *MX: =4*

φ(x):=4x+5 *Mφ: =21*

$$DX := \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - (MX)^2 \qquad DX := 2.4 .$$

$$D\varphi := \int_a^b (\varphi(x))^2 \cdot f(x)dx - (M\varphi)^2 \qquad DX := 38.4 .$$

5. Найдем функцию распределения *F(x)*. По определению

$$F(x) = P(x < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Очевидно, что для $x \le 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0 .$$

Для $q < x \le 6$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx + \int_{2}^{x} 0.188\,(x-4)^2\,dx .$$

Первый интеграл равен нулю, второй вычислим на MATHCAD

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \to 0.063\cdot(x-4)^3 + 0.504.$$

Для x > 6

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx + \int_{2}^{6} 0.188(x-4)^2 dx + \int_{6}^{x} 0\cdot dx = 1.$$

Первый и третий интегралы равны нулю, а второй интеграл равен единице.

Поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 2, \\ 0.063\cdot(x-4)^3 & при \quad 2 < x \le 6, \\ 1 & при \quad x > 6. \end{cases}$$

6. Построим графики дифференциальной f(x) и интегральной F(x) функций распределения. Воспользуемся широкими графическими возможностями MATHCAD. Составим программу:

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} 0 \quad if \quad x \le 2 \\ 0.188\cdot(x-4)^2 \quad if \quad 2 < x \le 6 \\ 0 \quad if \quad x > 6 \end{array} \right. ,$$

$$F(x) := \left| \begin{array}{l} 0 \quad if \quad x \le 2 \\ 0.063\cdot(x-4)^3 + 0.5 \quad if \quad 2 < x \le 6 \\ 1 \quad if \quad x > 6. \end{array} \right.$$

Щелкнем мышью по пункту меню ГРАФИКИ, выберем ДЕКАРТОВ ГРАФИК. В соответствующих местах укажем аргумент *x;* слева по нижней строке его значение 1, справа – 7; слева по вертикали функцию *f(x)* и ниже *F(x)*.

Появится изображение, представленное на рис. 1.

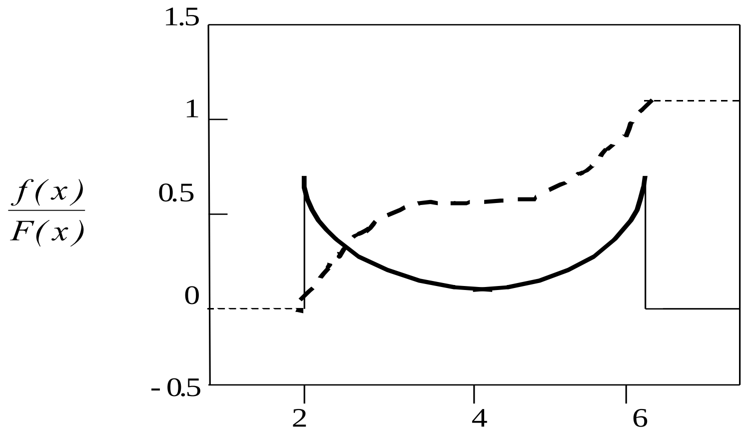

Рис.1. График дифференциальной функции f(x) ———
График интегральной функции F(x) - - - - - - - - - - - -

Список литературы

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1999.
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: «Дело», 2013.